

TD 2024-2025
Analyse 2
Chapitre 2
Limites dans un espace vectoriel normé

941

1 Normes équivalentes

Exercice 1 (*Centrale 2001*)

$E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.

On note N_∞ la norme sur $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}) \quad N_\infty(f) = \max_{x \in [0; 1]} |f(x)|$$

1. Montrer qu'on peut définir deux normes N et N' sur E par :
 $N(f) = N_\infty(f) + N_\infty(f')$ et $N'(f) = N_\infty(f + f')$
2. Montrer leur équivalence.

Indication

On pourra montrer :

$$\forall f \in E \quad \forall x \in [0; 1] \quad f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t)) e^t dt$$

2 Suites d'un espace vectoriel de dimension finie

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $6u^2 - 5u + id_E = 0$.

On se propose de montrer que $u^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

1. Première méthode

- (a) Montrer que u est diagonalisable.
- (b) Montrer qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 de E tels que u^n soit combinaison linéaire de p_1 et de p_2 .
En calculant les deux coefficients de cette combinaison linéaire montrer que $u^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Deuxième méthode

- (a) Effectuer la division euclidienne de X^n par $6X^2 - 5X + 1$.
- (b) En déduire $u^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit λ et $\mu \in \mathbb{K}$ tq $|\lambda|$ et $|\mu| < 1$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $(u - \lambda \text{id}_E)^2 \circ (u - \mu \text{id}_E) = 0$.

Montrer que $u^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 4 (*Mines 2015*)

$$\begin{cases} z_0 = \frac{i}{2} \\ z_{n+1} = \frac{6z_n + 1}{z_n + 6} \end{cases}$$

Etudier la suite.

Exercice 5 (*Centrale 99*)

$$f(x) = \tan x - \frac{x^2}{1+x}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $I_n = \left] n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$ notée α_n .
2. Montrer que $\alpha_n = n\pi + a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en déterminant a, b, c trois réels.

3 Point adhérent à une partie et adhérence**Exercice 6**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit C une partie convexe de E .

Montrer que l'adhérence de C est une partie convexe de E .

4 Limite et continuité en un point**Exercice 7**

$$\text{Soit } f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x+y}{\sin(x+y)} \text{ si } \sin(x+y) \neq 0 \\ (x, y) \mapsto 1 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Quels sont les points où f est continue ?