TD 2024-2025
Analyse 2
Chapitre 2
Limites dans un espace vectoriel normé
Correction

941

1 Normes équivalentes

Exercice 1 *(Centrale 2001)*

$E = \{f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R}) \text{ tq } f(0)=0\}$.
On note N_∞ la norme sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$définie par :
$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})\ N_\infty(f) = \max\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$

1. Montrer qu'on peut définir deux normes N et N' sur E par :
   $N(f) = N_\infty(f) + N_\infty(f')$ et $N'(f) = N_\infty(f+f')$
2. Montrer leur équivalence.
   Indication
   On pourra montrer :
   $\forall f \in E\ \forall x \in [0;1]\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x (f(t)+f'(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

Correction

1. On commence par vérifier que N est une norme :
   - $\forall f \in E\ N(f) \in \mathbb{R}_+$.
   - $$\begin{aligned}\forall f \in E\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\ N(\lambda f) &= N_\infty(\lambda f) + N_\infty(\lambda f') = |\lambda|\,N_\infty(f) + |\lambda|\,N_\infty(f')\\ &= |\lambda|\left(N_\infty(f)+N_\infty(f')\right)\\ &= |\lambda|\,N(f)\end{aligned}$$
   - Soit $f \in E$ tel que $N(f)=0$.
     $N_\infty(f)+N_\infty(f')=0$ avec $N_\infty(f)$ et $N_\infty(f') \geq 0$ donc $N_\infty(f) = N_\infty(f') = 0$.
     Donc $f=0$ (N_∞ est une norme).
   - $$\begin{aligned}\forall (f,g)\in E^2\ N(f+g) &= N_\infty(f+g)+N_\infty(f'+g')\\ &\leq N_\infty(f)+N_\infty(g)+N_\infty(f')+N_\infty(g')\\ &\leq N(f)+N(g)\end{aligned}$$

   On vérifie ensuite que N' est une norme.

- $\forall f \in E\ N'(f) \in \mathbb{R}_+$.
-
$$\begin{aligned}\forall f \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ N'(\lambda f) &= N_\infty(\lambda f + \lambda f') = N_\infty\left(\lambda(f+f')\right)\\ &= |\lambda|\, N_\infty(f+f')\\ &= |\lambda|\, N'(f)\end{aligned}$$
- Soit $f \in E$ tq $N'(f) = 0$.
  $N_\infty(f+f') = 0$ donc $f + f' = 0$ ie f est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$.
  On en déduit :
  $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in [0;1]\ f(x) = C\,\mathrm{e}^{-x}$.
  Mais $f(0) = 0$ donc $C = 0$ et f est bien la fonction nulle.
-
$$\begin{aligned}\forall (f,g) \in E^2\ N'(f+g) &= N_\infty(f+g+f'+g')\\ &\leq N_\infty(f+f') + N_\infty(g+g')\\ &\leq N'(f) + N'(g)\end{aligned}$$

2. $\forall f \in E\ N'(f) = N_\infty(f+f') \leq N_\infty(f) + N_\infty(f') = N(f)$
   On ne peut pas faire mieux cf $x \mapsto x$.

   Soit $f \in E$.
   La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + y = f(x) + f'(x)$.
   Résolvons cette équation.
   L'équation homogène associée est $y' + y = 0$ de solution générale $y = C\,\mathrm{e}^{-x}$.
   La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière de la forme $y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   On trouve $C'(x)\,\mathrm{e}^{-x} = f'(x) + f(x)$ ce qui conduit à $C(x) = \displaystyle\int_0^x (f(t)+f'(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + Cte$.
   La solution générale de l'équation différentielle $y' + y = f(x) + f'(x)$ est donc :
   $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x (f(t)+f'(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
   En faisant $x = 0$, on trouve $y(0) = C$.
   $\forall f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})\ \forall x \in [0;1]\ f(x) = f(0)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x (f(t)+f'(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
   Et donc compte tenu de $f(0) = 0$:
   $\forall f \in E\ \forall x \in [0;1]\ f(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x (f(t)+f'(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
   On en déduit :
$$\begin{aligned}\forall x \in [0;1]\ \ |f(x)| &\leq \mathrm{e}^{-x}\int_0^x |f(t)+f'(t)|\ \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ &\leq \int_0^1 N'(f)\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}N'(f)\\ |f'(x)| &= |f'(x)+f(x)-f(x)| \leq |f'(x)+f(x)| + |f(x)|\\ &\leq (\mathrm{e}+1)N'(f)\end{aligned}$$
   Donc $N(f) \leq (2\,\mathrm{e}+1)N'(f)$.
   N et N' sont bien équivalentes.

2 Suites d'un espace vectoriel de dimension finie

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $6u^2 - 5u + id_E = 0$.
On se propose de montrer que $u^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

1. **Première méthode**
   (a) Montrer que u est diagonalisable.
   (b) Montrer qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 de E tels que u^n soit combinaison linéaire de p_1 et de p_2.
   En calculant les deux coefficients de cette combinaison linéaire montrer que $u^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2. **Deuxième méthode**
   (a) Effectuer la division euclidienne de X^n par $6X^2 - 5X + 1$.
   (b) En déduire $u^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Correction
E étant de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. Se poser la question de la convergence d'une suite à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ sans préciser la norme a bien un sens.

1. (a) u est annulé par le polynôme $6X^2 - 5X + 1 = 6\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1}{3}\right)$ qui est scindé à racines simples donc u est diagonalisable.
   (b) Le spectre de u est inclus dans $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$.
   Si il y a égalité alors $E = \text{Ker}\left(u - \frac{1}{2}\right) \oplus \text{Ker}\left(u - \frac{1}{3}\right)$: u est diagonalisable donc E est la somme des sous-espaces propres de u.
   Si le spectre de u est strictement contenu dans $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$, la décomposition précédente reste vraie car un des deux noyaux est égal à $\{0\}$ et l'autre à E.
   On peut alors définir p_1 le projecteur de E sur $\text{Ker}\left(u - \frac{1}{2}id_E\right)$ parallèlement à $\text{Ker}\left(u - \frac{1}{3}id_E\right)$ et p_2 le projecteur de E sur $\text{Ker}\left(u - \frac{1}{3}id_E\right)$ parallèlement à $\text{Ker}\left(u - \frac{1}{2}id_E\right)$
   D'après le cours :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ u^n(p_1(x)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n p_1(x)$ car $p_1(x) \in \text{Ker}\left(u - \frac{1}{2}id_E\right)$
   et :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ u^n(p_2(x)) = \left(\frac{1}{3}\right)^n p_2(x)$
   Donc :

$$\begin{array}{rcl}\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ u^n(x) & = & u^n\left(p_1(x) + p_2(x)\right) = u^n(p_1(x)) + u^n(p_2(x)) \\ & = & \frac{1}{2^n}p_1(x) + \frac{1}{3^n}p_2(x)\end{array}$$

   Donc $u^n = \frac{1}{2^n}p_1 + \frac{1}{3^n}p_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Il existe un et un seul couple (Q_n, R_n) de polynômes tels que $X^n = Q_n(X)(6X^2 - 5X + 1) + R_n(X)$ avec R_n de degré strictement inférieur au degré de $6X^2 - 5X + 1$.
R_n est donc de la forme $R_n(X) = a_nX + b_n$.
On a pour r racine de $6X^2 - 5X + 1$: $r^n = Q_n(r)(6r_n^2 - 5r_n + 1) + a_nr + b_n = a_nr + b_n$.
D'où le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{a_n}{2} + b_n \\ \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{a_n}{3} + b_n \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{a_n}{6} \\ \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{a_n}{3} + b_n \end{cases}$$

(b) On a donc $a_n = 6\left(\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{3^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit $b_n = \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{a_n}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Mais $u^n = Q_n(u)(6u^2 - 5u + 1) + R_n(u) = a_nu + b_n$ donc $u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit λ et $\mu \in \mathbb{K}$ tq $|\lambda|$ et $|\mu| < 1$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $(u - \lambda id_E)^2 \circ (u - \mu id_E) = 0$.
Montrer que $u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction
E étant de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. Se poser la question de la convergence d'une suite à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ sans préciser la norme a bien un sens.
Le polynôme $(X - \lambda)^2(X - \mu)$ annule u. On en déduit que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda; \mu\}$.
$(X - \lambda)^2(X - \mu)$ n'étant pas scindé à racines simples, u n'est pas forcément diagonalisable.
On effectue la division euclidienne de X^n par $(X - \lambda)^2(X - \mu)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Il existe un et un seul couple (Q_n, R_n) de polynômes tels que $X^n = Q_n(X)(X - \lambda)^2(X - \mu) + R_n(X)$ avec R_n de degré strictement inférieur au degré de $(X - \lambda)^2(X - \mu)$.
R_n est donc de la forme $R_n(X) = a_nX^2 + b_nX + c_n$.
On a pour r racine de $(X-\lambda)^2(X-\mu)$: $r^n = Q_n(r)(r-\lambda)^2(r-\mu) + a_nr^2 + b_nr + c_n = a_nr^2 + b_nr + c_n$.
Donc :
$a_n\lambda^2 + b_n\lambda + c_n = \lambda^n$
$a_n\mu^2 + b_n\mu + c_n = \mu^n$
Mais on a aussi :
$nX^{n-1} = Q_n'(X)(X - \lambda)^2(X - \mu) + Q_n(X)\left((X - \lambda)^2(X - \mu)\right)' + 2a_nX + b_n$
et comme λ est racine double de $(X - \lambda)^2(X - \mu)$:
$2a_n\lambda + b_n = n\lambda^{n-1}$

Matriciellement : $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \mu^2 & \mu & 1 \\ 2\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n \\ \mu^n \\ n\lambda^{n-1} \end{pmatrix}$

Mais :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \mu^2 & \mu & 1 \\ 2\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \mu^2-\lambda^2 & \mu-\lambda & 0 \\ 2\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} \ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} \mu^2-\lambda^2 & \mu-\lambda \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix} = (\mu-\lambda)\begin{vmatrix} \mu+\lambda & 1 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\mu-\lambda)^2 \neq 0 \text{ car } \mu \neq \lambda
\end{aligned}$$

Donc la matrice $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \mu^2 & \mu & 1 \\ 2\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \mu^2 & \mu & 1 \\ 2\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^n \\ \mu^n \\ n\lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

$|\lambda|$ et $|\mu| < 1$ donc les suites $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

On en déduit que $\begin{pmatrix} \lambda^n \\ \mu^n \\ n\lambda^{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Mais $u^n = Q_n(u) \circ (u - \lambda id_E)^2 \circ (u - \mu id_E) + a_n u^2 + b_n u + c_n id_E = a_n u^2 + b_n u^2 + c_n id_E$ donc $u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 4 *(Mines 2015)*

$$\begin{cases} z_0 = \dfrac{i}{2} \\ z_{n+1} = \dfrac{6z_n+1}{z_n+6} \end{cases}$$

Etudier la suite.

Correction

Soit $f : z \mapsto \dfrac{6z+1}{z+6}$.

On commence par chercher les points fixes de f : si la suite (z_n) converge, c'est vers un point fixe de f.

$$\begin{aligned}
f(z) = z &\iff 6z+1 = z^2+6z \\
&\iff z^2 = 1 \\
&\iff z = \pm 1
\end{aligned}$$

On calcule ensuite $f(z)-1$ et $f(z)+1$ pour voir si on se rapproche de 1 ou de -1.

$$\begin{aligned}
f(z)-1 &= \frac{6z+1}{z+6} - 1 = \frac{6z+1-z-6}{z+6} = \frac{5z-5}{z+6} = \frac{5(z-1)}{z+6} \\
f(z)+1 &= \frac{6z+1}{z+6} + 1 = \frac{6z+1+z+6}{z+6} = \frac{7z+7}{z+6} = \frac{7(z+1)}{z+6}
\end{aligned}$$

- **Première méthode**
  On essaie d'intuiter le résultat.

$|z_0+6| = \sqrt{\frac{1}{4}+36} \in]6;7[$ donc $|z_1+1| > |z_0+1|$ et $|z_1-1| < |z_0-1|$.
On peut penser que la suite va converger vers 1 mais il faut le montrer.
On pose $Z_n = z_n - 1$.
Il s'agit de montrer que la suite de nombres complexes (Z_n) converge vers 0. Cela revient à montrer que la suite de nombres réels $(|Z_n|)$ converge vers 0.
$\forall n \in \mathbb{N}\ Z_{n+1} = z_{n+1} - 1 = f(z_n) - 1 = \dfrac{5(z_n-1)}{z_n+6} = \dfrac{5Z_n}{Z_n+7}$
$7 = |Z_n + 7 + (-Z_n)| \leq |Z_n+7| + |Z_n|$ donc $|Z_n+7| \geq 7 - |Z_n|$
Si $|Z_n| < 7$ alors $|Z_{n+1}| \leq \dfrac{5\,|Z_n|}{7-|Z_n|}$.
L'idée est ensuite de comparer la suite $|Z_n|$ à la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = |Z_0| = \left|1+\dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = g(v_n)$
avec $g\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{5x}{7-x}\end{cases}$.
La méthode habituelle consiste à étudier les variations de g et le signe de $g(x)-x$.
g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{7\}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{7\}\ g'(x) = 5\dfrac{7-x+x}{(7-x)^2} = \dfrac{35}{(7-x)^2}$
g est donc strictement croissante sur $]-\infty;7[$ et sur $]7;+\infty[$.
$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{7\}\ g(x) - x = x\dfrac{5-(7-x)}{7-x} = \dfrac{x(x-2)}{7-x}$
On place $x=0$ et $x=2$ sur le tableau de variations et on constate que $[0;2]$ est stable par g.
Au départ $|Z_0| = \left|1+\dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \in [0;2]$.
Si $|Z_n| \in [0;2]$ alors :
$0 \leq |Z_{n+1}| \leq \dfrac{5\,|Z_n|}{7-|Z_n|}$ car $|Z_n| < 7$
D'où :
$0 \leq |Z_{n+1}| \leq g(|Z_n|) \leq 2$
La suite (Z_n) est donc bien définie avec :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |Z_n| \leq 2$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |Z_{n+1}| \leq g(|Z_n|)$
Il n'est pas utile d'utiliser la suite (v_n) :
On a :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |Z_{n+1}| \leq |Z_n|$
La suite $(|Z_n|)$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $l \in [0;|Z_0|] \subset [0;2[$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ |Z_{n+1}| \leq g(|Z_n|)$
Donc $l \leq g(l)$.
Mais $l \in [0;2[$ donc $g(l) \leq l$.
On en déduit $g(l) = l$ puis $l = 0$.

- **Deuxième méthode**
  On remarque que si z est différent de -1 et de -6 alors :

$\dfrac{f(z)-1}{f(z)+1} = \dfrac{5}{7}\ \dfrac{z-1}{z+1}$
Il s'agit donc de montrer que la suite (z_n) est bien définie et qu'elle ne prend jamais la valeur -1.

$$\begin{aligned} f(z)=\lambda &\iff \frac{6z+1}{z+6}=\lambda \\ &\iff 6z+1=\lambda z+6\lambda \\ &\iff (6-\lambda)z=6\lambda-1 \end{aligned}$$

Donc :
$f(z)\in\mathbb{R} \Longrightarrow z\in\mathbb{R}$
Par contrapposition :
$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \Longrightarrow f(z)\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$
Or $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ donc , par récurrence, la suite (z_n) est bien définie avec :
$\forall n\in\mathbb{N}\ z_n\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$
On pose alors $u_n=\dfrac{z_n-1}{z_n+1}$ et on a :
$\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=\dfrac{5}{7}u_n$
(u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{7}\in]-1;1[$ donc (u_n) converge vers 0 et $z_n=\dfrac{u_n+1}{1-u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

- **Troisième méthode**
  On essaie d'intuiter le résultat.
  $|z_0+6|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+36}\in]6;7[$ donc $|z_1+1|>|z_0+1|$ et $|z_1-1|<|z_0-1|$.
  On peut penser que la suite va converger vers 1 mais il faut le montrer.
  $|f(z)-1|=\dfrac{5}{|z+6|}\ |z-1|$
  Si z est à droite de la droite verticale Δ d'équation $y=-1$, alors $|z+6|\geq 5$ (faire un dessin) et $f(z)$ se rapproche de 1.
  On fait un dessin.
  On trace le cercle de centre 1 et passant par z_0.
  Son rayon est $|z_0-1|<2$ et il coupe l'axe des x à gauche en $1-|z_0-1|>-1$.
  Donc le disque de centre 1 et de rayon $|z_0-1|$ est stable par f.
  Sur le dessin, on voit que si z appartient au disque de centre 1 et de rayon $|z_0-1|$:
  $|z+6|\geq|1-|z_0-1|+6|=|7-|z_0-1||=7-|z_0-1|=a>5$
  On a alors :
  $\forall n\in\mathbb{N}\ |z_{n+1}-1|\leq\dfrac{5}{a}\ |z_n-1|$
  $0<\dfrac{5}{a}<1$ donc (z_n) converge vers 1.
- **Quatrième méthode**
  $f(z)=1\iff 6z+1=z+6\iff z=1$.
  Un récurrence triviale permet de montrer :
  $\forall n\in\mathbb{N}\ z_n\neq 1$

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\ \frac{1}{z_{n+1}-1} &= \frac{1}{f(z_n)-1}=\frac{z_n+6}{5(z_n-1)} \\ &= \frac{1}{5}+\frac{7}{5(z_n-1)}\end{aligned}$$

Donc la suite définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \dfrac{1}{z_n - 1}$
est arithmético-géométrique.
$l = \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5} l \iff l = -\dfrac{1}{2}$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = -\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{7}{5}\right)^n \dfrac{-1+i}{2}$
Donc $\dfrac{1}{|z_n - 1|} = |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 5 *(Centrale 99)*

$f(x) = \tan x - \dfrac{x^2}{1+x}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $I_n = \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}; n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ notée α_n.
2. Montrer que $\alpha_n = n\pi + a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ en déterminant a, b, c trois réels.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I_n et :
$$\begin{aligned}\forall x \in I_n\ f'(x) &= 1 + \tan^2(x) - \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2}\\ &= \tan^2(x) + \frac{1 + 2x + x^2 - 2x - x^2}{(1+x)^2}\\ &= \tan^2(x) + \frac{1}{(1+x)^2} > 0\end{aligned}$$
   De plus $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to n\pi - \frac{\pi}{2}\\ x > n\pi - \frac{\pi}{2}}]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to n\pi + \frac{\pi}{2}\\ x < n\pi - \frac{\pi}{2}}]{} +\infty$ donc f réalise une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$.
   On conclut facilement.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \alpha_n \in I_n$
   donc $\alpha_n \sim n\pi$
$$\tan(\alpha_n - n\pi) = \tan(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^2}{1+\alpha_n} \sim \frac{(n\pi)^2}{n\pi} = n\pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
   Mais $\alpha_n - n\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc :
   $\alpha_n - n\pi = \arctan(\tan(\alpha_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$

ce qui donne : $\alpha_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + o(1)$

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_n & = & n\pi + \arctan\left(\tan\left(\alpha_n\right)\right) = n\pi + \arctan\left(\dfrac{\alpha_n^2}{1+\alpha_n}\right) \\
& = & n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1+\alpha_n}{\alpha_n^2}\right) = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n\pi}\dfrac{1/(n\pi)+\alpha_n/(n\pi)}{(\alpha_n/(n\pi))^2}\right) \\
& = & = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n\pi}\dfrac{1+1/(2n)+1/(n\pi)}{\left(1+1/(2n)\right)^2}\right) \\
& = & n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n\pi}\left(1+\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\right)\right)\left(1-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) \\
& = & n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n\pi}\left(1+\dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\right)+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) \\
& = & n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{n\pi}+\dfrac{1}{n^2\pi}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\right)+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \\
& = & n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{1}{n\pi}+\dfrac{1}{n^2\pi}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\right)+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)
\end{array}$$

On trouve donc :

$$\begin{array}{rcl}
a & = & \dfrac{\pi}{2} \\
b & = & \dfrac{-1}{\pi} \\
c & = & \dfrac{\pi-2}{2\,\pi^2}
\end{array}$$

3 Point adhérent à une partie et adhérence

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit C une partie convexe de E.
Montrer que l'adhérence de C est une partie convexe de E.

Correction
Soient $x, y \in \overline{C}$ et $t \in [0;1]$.
Il existe deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans C telles que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$.

- $\forall n \in \mathbb{N}\ (1-t)x_n + ty_n \in C$
- $(1-t)x_n + ty_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1-t)x + ty$

Donc $(1-t)x + ty \in \overline{C}$
$\overline{C}$ est convexe.

4 Limite et continuité en un point

Exercice 7

Soit $f\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{\sin(x+y)} \text{ si } \sin(x+y) \neq 0 \\ (x,y) \mapsto 1 \text{ sinon}\end{cases}$.

Quels sont les points où f est continue ?

Correction

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- **Premier cas :** $\sin(x_0 + y_0) \neq 0$

  f est continue en (x_0, y_0) :

  Il existe un disque D (ouvert ou fermé peu importe) centré en (x_0, y_0) de rayon strictement positif (c'est important) tel que :

  $\forall (x,y) \in D \ \sin(x+y) \neq 0$

  On peut le justifier au moyen d'un dessin faisant apparaître le point (x_0, y_0) et les droites d'équation $x + y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  On peut aussi utiliser un argument de continuité :

  La fonction $\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y\end{cases}$ est continue car polynomiale (ou linéaire).

  La fonction sin étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin(x+y)\end{cases}$ est continue.

  Par conséquent, en écrivant la définition de la continuité en (x_0, y_0) avec $\epsilon = \dfrac{|\sin(x_0+y_0)|}{2} > 0$, il existe un disque D de rayon $\delta > 0$ centré en (x_0, y_0) tel que :

  $\forall (x,y) \in D \ |\sin(x+y) - \sin(x_0+y_0)| \leq \dfrac{|\sin(x_0+y_0)|}{2}$

  On a alors :

  $\forall (x,y) \in D \ \sin(x+y) \geq \sin(x_0+y_0) - \dfrac{|\sin(x_0+y_0)|}{2} = \dfrac{|\sin(x_0+y_0)|}{2} > 0$

  On a donc :

  $\forall (x,y) \in D \ f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sin(x+y)} \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} \dfrac{x_0+y_0}{\sin(x_0+y_0)} = f(x_0,y_0)$

  D étant un disque de rayon strictement positif centré en (x_0, y_0), on peut en déduire (au moyen d'un jeu d'écriture sur la définition si on y tient) que f est continue en (x_0, y_0).

- **Deuxième cas :** $\sin(x_0+y_0) = 0$ et $x_0 + y_0 \neq 0$

  Si f était continue en (x_0, y_0), on aurait :

  $x + y = f(x,y)\sin(x+y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \sin(x+y)\neq 0}]{} f(x_0,y_0)\sin(x_0+y_0) = 0$: absurde

  (On voit bien sur un dessin que (x_0, y_0) est point adhérent à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \sin(x+y) \neq 0\}$)

  On peut également dire que pour $t \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$:

  $\sin(x_0 + t + y_0 + t) = \sin(x_0 + y_0 + 2t) = \pm\sin(2t) \neq 0$ car $x_0 + y_0 \in \pi\mathbb{Z}$.

  Donc, toujours pour $t \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$:

  $f(x_0+t, y_0+t) = \dfrac{x_0+y_0+2t}{\pm\sin(2t)} \sim_{t\to 0^+} \pm\dfrac{x_0+y_0}{2t} \xrightarrow[\substack{t\to 0 \\ t>0}]{} \pm\infty$

- **Troisième cas :** $\sin(x_0+y_0) = 0$ et $x_0+y_0 = 0$, ou ce qui revient au même : $x_0+y_0 = 0$

La fonction $\varphi \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{t}{\sin t} \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$ est continue et au voisinage de (x_0, y_0) et $f(x,y) = \varphi(x+y)$ donc f est continue en (x_0, y_0).