DM 2

MINES-PONTS, épreuve 1 PC - PSI 2005

I. Préliminaires

1. La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t) - t$ est $\mathcal{C}^1$ sur son intervalle de définition $]-1, +\infty[$ et :

$\forall t > -1\ f'(t) = -\dfrac{t}{1+t}$

On a donc f croissante sur $]-1;0]$, décroissante sur $[0, +\infty[$ et $f(t)$ est maximal pour $t = 0$, ce qui donne l'inégalité

$$\forall t \in]-1, +\infty[\ \ln(1+t) - t \leq 0$$

$$\forall t \in]-1, +\infty[\qquad \ln(1+t) \leq t\ .$$

On peut également invoquer la concavité de la fonction ln :

$\forall x > 0\ \ln^{(2)}(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$

Donc la fonction est sous sa tangente en $x = 1$:

$\forall x > 0\ \ln(x) \leq x - 1$

et il n'y a plus qu'à remplacer x par $1 + t$.

La fonction $g : t \mapsto t \ln t$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifie $g'(t) = 1 + \ln t$. On a donc g décroissante sur $]0, e^{-1}]$, croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$ et $g(t)$ est minimal pour $t = e^{-1}$, ce qui donne l'inégalité

$$\forall t \in]0, +\infty[\qquad t \ln t \geq g(e^{-1}) = -\frac{1}{e}\ .$$

2. Dans ce cas, on a, sur J, $(\psi^{-1})' = \dfrac{1}{\psi' \circ \psi^{-1}}$, autrement dit, si $y \in J$, on a $(\psi^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\psi'(x)}$ en posant $x = \psi^{-1}(y) \in I$, c'est-à-dire $y = \psi(x)$.

II. Construction d'une application particulière

3. • Si $f \in H$, alors pour un certain $\rho > 0$, on a une majoration de la forme

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \left| f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \right| = f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\rho}\, e^{-\rho u^2}\ ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$ (en effet, $\lim\limits_{u \to \pm\infty} u^2 e^{-\rho u^2} = \lim\limits_{v \to +\infty} v e^{-\rho v} = 0$ par croissances comparées, donc $e^{-\rho u^2}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{u^2}$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$). Comme $f \in H_0$, la fonction $u \mapsto f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et a fortiori sur $]-\infty, x]$ pour tout x réel, ce qui justifie l'existence de $F_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• La fonction F_f est une primitive de la fonction continue $u \mapsto f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}$, donc F_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad (F_f)'(u) = f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\ .$$

Ainsi, F_f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc établit une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle image $F_f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} F_f, \lim\limits_{+\infty} F_f[$. Mais on a $\lim\limits_{-\infty} F_f = 0$ ("reste d'une intégrale convergente") et $\lim\limits_{+\infty} F_f = \sqrt{2\pi}$ car $f \in H_0$. Comme $\forall u \in \mathbb{R}\quad (F_f)'(u) \neq 0$, on peut affirmer que la bijection réciproque de F_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

4. On demande de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_f\big(\varphi(x)\big) = F_1(x)\ .$$

Comme F_f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,\sqrt{2\pi}[$ et que F_1 est prend ses valeurs dans $]0,\sqrt{2\pi}[$, cette condition équivaut à $\varphi=(F_f)^{-1}\circ F_1$.

5. L'application φ est la composée de deux bijections de classe $\mathcal{C}^1$ (F_1 de $\mathbb{R}$ sur $]0,\sqrt{2\pi}[$, puis $(F_f)^{-1}$ de $]0,\sqrt{2\pi}[$ sur $\mathbb{R}$), donc c'est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; sa bijection réciproque $(F_1)^{-1}\circ F_f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.Enfin, φ est strictement croissante comme composée de deux applications strictement croissantes.

6. On a $\varphi'(x)>0$ pour tout x réel, d'où l'existence de $\ln\big(\varphi'(x)\big)$. Dérivons la relation $\varphi=(F_f)^{-1}\circ F_1$, cela donne

$$\varphi'=(F_1)'\cdot\Big(\big((F_f)^{-1}\big)'\circ F_1\Big)=\frac{(F_1)'}{(F_f)'\circ(F_f)^{-1}\circ F_1}=\frac{(F_1)'}{(F_f)'\circ\varphi}\ ,$$

autrement dit, pour tout x réel, on a la relation

$$\varphi'(x)=\frac{F_1'(x)}{F_f'\big(\varphi(x)\big)}=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{f\big(\varphi(x)\big)\,e^{-\frac{\varphi(x)^2}{2}}}\ .$$

En prenant le logarithme, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \ln\big(\varphi'(x)\big)+\ln\Big(f\big(\varphi(x)\big)\Big)-\frac{1}{2}\,\varphi(x)^2=-\frac{x^2}{2}\ .$$

De même, $(\varphi^{-1})'(x)>0$ et, de $\varphi^{-1}=(F_1)^{-1}\circ F_f$, on tire

$$(\varphi^{-1})'=\frac{(F_f)'}{(F_1)'\circ\varphi^{-1}}\ ,\qquad\text{soit}\qquad\forall x\in\mathbb{R}\quad(\varphi^{-1})'(x)=\frac{f(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{\varphi^{-1}(x)^2}{2}}}\ ,$$

puis

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \ln\big((\varphi^{-1})'(x)\big)-\ln\big(f(x)\big)-\frac{1}{2}\,\big(\varphi^{-1}(x)\big)^2=-\frac{x^2}{2}\ .$$

7. On fait le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $u=\varphi(v)$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)\,f(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\quad&=\quad\int_{-\infty}^{+\infty}h\big(\varphi(v)\big)\,f\big(\varphi(v)\big)\,e^{-\frac{\varphi(v)^2}{2}}\,\varphi'(v)\,\mathrm{d}v\\&=\quad\int_{-\infty}^{+\infty}h\big(\varphi(v)\big)\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

d'après les calculs de la question précédente.
D'après le cours, il n'y a pas de problème de convergence de ces intégrales. Mais l'intégrabilité est définie par la convergence absolue de l'intégrale.
La fonction $g:u\mapsto h(u)\,f(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|h(u)|\,f(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$ converge.
On en déduit avec le théorème du cours que

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|h\big(\varphi(v)\big)\right| \, f\big(\varphi(v)\big) \, e^{-\frac{\varphi(v)^2}{2}} \, \varphi'(v) \, \mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|h\big(\varphi(v)\big)\right| \, e^{-\frac{v^2}{2}} \, \mathrm{d}v$ converge et donc que la fonction $v \mapsto h\big(\varphi(v)\big) \, e^{-\frac{v^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

8. Prenons $A = \max\big\{1, \varphi^{-1}(0)\big\}$. On a alors $A > 0$ et, pour $x \geq A$, la fonction φ est croissante et positive sur $[x, x+1]$ donc il en est de même de φ^2, la fonction $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est décroissante et positive sur $[x, x+1]$; ainsi, pour $u \in [x, x+1]$, on a $\varphi^2(u) \geq \varphi^2(x) \geq 0$ et $e^{-\frac{u^2}{2}} \geq e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \geq 0$ donc, en multipliant membre à membre ces inégalités, on a

$$\forall u \in [x, x+1] \qquad \varphi^2(u) \, e^{-\frac{u^2}{2}} \geq \varphi^2(x) \, e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \; .$$

Enfin, en intégrant par rapport à u sur le segment $[x, x+1]$, on obtient l'inégalité demandée.

9. • Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. La fonction $g : u \mapsto g(u) = h(u) \, f(u) \, e^{-\frac{u^2}{2}} = u^2 \, f(u) \, e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq u^2 \, f(u) \, e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\rho} \, u^2 \, e^{-\rho u^2} \; ,$$

ce qui implique

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \left| u^2 \, f(u) \, e^{-\frac{u^2}{2}} \right| \leq \left| \frac{1}{\rho} \, u^2 \, e^{-\rho u^2} \right| \; ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$ par des considérations de croissances comparées habituelles. De la question **7.**, on déduit alors que la fonction $u \mapsto \varphi(u)^2 \, e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne notamment que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} \varphi^2(u) \, e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u = 0$ (en effet, $\displaystyle\int_x^{x+1} = \int_x^{+\infty} - \int_{x+1}^{+\infty}$ et chaque terme tend vers zéro comme reste d'une intégrale convergente). Il existe donc un réel positif C tel que

$$x \geq C \Longrightarrow 0 \leq \int_x^{x+1} \varphi^2(u) \, e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u \leq 1 \; .$$

Pour $x \geq \max\{A, C\}$, on a alors, par la question **8 .**, $\varphi^2(x) \, e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \leq 1$, donc $|\varphi(x)| \leq e^{\frac{(x+1)^2}{4}} = e^{\frac{(|x|+1)^2}{4}}$.

• Pour achever de répondre à la question, il faut reprendre une démarche analogue lorsque x tend vers $-\infty$. Commençons par dire que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \int_{x-1}^{x} \varphi^2(u) \, e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u = 0$ donc il existe un réel négatif C' tel que

$$x \leq C' \Longrightarrow 0 \leq \int_{x-1}^{x} \varphi^2(u) \, e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u \leq 1 \; .$$

Par ailleurs, en prenant $A' = \min\big\{0, \varphi^{-1}(0)\big\}$, si $x \leq A'$, alors, pour tout $u \in [x-1, x]$, on a $\varphi(u) \leq \varphi(x) \leq 0$ d'où $0 \leq \varphi^2(x) \leq \varphi^2(u)$, et $0 \leq x^2 \leq u^2 \leq (x-1)^2 = (|x|+1)^2$, donc $0 \leq e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}} \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$ puis, par multiplication d'inégalités à membres positifs,

$\varphi^2(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \;\geq\; \varphi^2(x)\, e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}}$; en intégrant enfin cette inégalité par rapport à u sur $[x-1, x]$, on obtient

$$x \leq A' \Longrightarrow \int_{x-1}^{x} \varphi^2(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \geq \varphi^2(x)\, e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}} .$$

Pour $x \leq \min\{A', C'\}$, on a alors $\varphi^2(x)\, e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}} \leq 1$, c'est-à-dire $|\varphi(x)| \leq e^{\frac{(|x|+1)^2}{4}}$.

- Il ne reste plus qu'à choisir $B = \max\{A, C, |A'|, |C'|\}$ pour en finir avec cette question assez technique. On a maintenant

$$|u| \geq B \Longrightarrow |\varphi(u)| \leq e^{\frac{(|u|+1)^2}{4}} .$$

10. Remarquons que, si g est une fonction dérivable, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Big(g(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\Big) = \big(g'(u) - u\, g(u)\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}} .$$

On cherche alors g telle que $g'(u) - u\, g(u) = u\, \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1$ et on trouve, sans trop de peine que $g(u) = u - \varphi(u)$ convient. En conclusion,

$$\int \big(u\, \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \big(u - \varphi(u)\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}} + C .$$

On peut également partir de $\displaystyle\int u\varphi(u)e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$ qu'on intègre par parties :

$$\int u\varphi(u)e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \varphi(u) \times (-e^{-\frac{u^2}{2}}) + \int \varphi'(u)e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$$

On en déduit :

$$\int \big(u\, \varphi(u) - \varphi'(u)\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = -\varphi(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} + Cte$$

De même :

$$\int u^2\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = u \times (-e^{-\frac{u^2}{2}}) + \int e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$$

ce qui donne :

$$\int \big(-u^2 + 1\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = u\, e^{-\frac{u^2}{2}} + Cte$$

11. Si a et b sont deux réels, on a donc

$$\int_a^b \big(u\, \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \big(b - \varphi(b)\big)\, e^{-\frac{b^2}{2}} - \big(a - \varphi(a)\big)\, e^{-\frac{a^2}{2}} .$$

Or, la fonction $u \mapsto \big(u - \varphi(u)\big)e^{-\frac{u^2}{2}}$ tend vers zéro en $-\infty$ et $+\infty$: en effet, $\displaystyle\lim_{u\to\pm\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} = 0$ et, pour $|u|$ assez grand, on a

$$0 \leq |\varphi(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}| \leq \exp\Big(\frac{(|u|+1)^2}{4} - \frac{u^2}{2}\Big) = \exp\Big(-\frac{u^2 - 2|u| - 1}{4}\Big) \underset{u\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

L'intégrale I est donc convergente et

$$I = \lim_{b\to+\infty} \big(b-\varphi(b)\big)\, e^{-\frac{b^2}{2}} - \lim_{a\to-\infty} \big(a-\varphi(a)\big)\, e^{-\frac{a^2}{2}} = 0 \;;.$$

Remarque. Ce raisonnement prouve seulement la convergence de l'intégrale (doublement) impropre I, et non pas l'intégrabilité de la fonction considérée (l'intégrande) comme il est demandé dans le préambule...

Montrons l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$.L'intégrabilité sur $\mathbb{R}_-$ se montre de manière similaire et donne alors l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$.
Il est clair à ce stade que la fonction $u \mapsto (1-u^2)e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall u \in \mathbb{R}_+ \left|u\varphi(u)e^{-\frac{u^2}{2}}\right| = ue^{-\frac{u^2}{2}}\,|\varphi(u)| \leq ue^{-u^2/4+u/2+1/4}$
$\forall u \in \mathbb{R}_+^*\ u^2\left|u\varphi(u)e^{-\frac{u^2}{2}}\right| \leq e^{-u^2/4+u/2+1/4+3\ln u}$
$-u^2/4+u/2+1/4+3\ln u \sim -u^2/4$ qui tend vers $-\infty$ en $+\infty$
Donc $u^2 \times u\varphi(u)e^{-\frac{u^2}{2}}$ tend vers 0 en $+\infty$ et $u \mapsto u\varphi(u)e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Donc $u \mapsto (u\varphi(u)-u^2+1)e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}(u\varphi(u)-u^2+1)e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ converge.
On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi'(u)e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ converge.
Mais : $\forall u \in \mathbb{R}_+\ \varphi'(u)e^{-\frac{u^2}{2}} \geq 0$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi'(u)e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ converge absolument et $u \mapsto \varphi'(u)e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Finalement : $u \mapsto \big(u\,\varphi(u)-u^2-\varphi'(u)+1\big)\,e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

III. Une inégalité intéressante

12. • f étant continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives, la fonction $u \mapsto f(u)\,\ln\big(f(u)\big)\,e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En utilisant l'inégalité **(2)** du "préliminaire" et le fait que $f \in H$, on obtient
$\forall u \in \mathbb{R}\ -\dfrac{1}{e} \leq f(u)\ \ln\big(f(u)\big)$
$\forall u \in \mathbb{R}\ \ln\big(f(u)\big) \leq -\ln\rho + (\dfrac{1}{2}-\rho)u^2$
$\forall u \in \mathbb{R}\ f(u)\ \ln\big(f(u)\big) \leq -\ln(\rho)\ f(u) + (\dfrac{1}{2}-\rho)u^2\ f(u)$ car $f(u) > 0$

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathbb{R}\ \big|f(u)\ \ln\big(f(u)\big)\big| &\leq \max\left(\left|-\frac{1}{e}\right|, \left|-\ln(\rho)\ f(u) + (\frac{1}{2}-\rho)u^2\ f(u)\right|\right)\\ &\leq \max\left(\frac{1}{e}, \left|\frac{1}{2}-\rho\right| u^2\ f(u) + |\ln(\rho)|\ f(u)\right)\end{aligned}$$

$$\leq \left|\frac{1}{2}-\rho\right| u^2\, f(u) + |\ln(\rho)|\ f(u) + \frac{1}{e}$$

On en déduit :

$$\forall u \in \mathbb{R}\ u^2 \left| f(u)\ \ln\big(f(u)\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \right| \leq \left|\frac{1}{2}-\rho\right| \frac{1}{\rho}\, u^4\, e^{-\rho u^2} + \frac{|\ln \rho|}{\rho}\, u^2\, e^{-\rho u^2} + \frac{u^2}{e}\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

puis :
$u^2\, f(u)\ \ln\big(f(u)\big) e^{-\frac{u^2}{2}}$ tend vers 0 quand $|u|$ tend vers l'infini.
La fonction $u \mapsto f(u)\ \ln\big(f(u)\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
On a donc la convergence (absolue) de l'intégrale $E(f)$.

- Pour la convergence de l'intégrale $\Phi(f)$, notons que

$$\big|u-\varphi(u)\big|^2\, e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \big(|u|+\varphi(u)\big)^2\, e^{-\frac{u^2}{2}} = u^2\, e^{-\frac{u^2}{2}} + 2|u|\,\varphi(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} + \varphi(u)^2\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

et chaque terme est une fonction de u intégrable sur $\mathbb{R}$ (*évident pour le premier, déjà dit à la question* **9.** *pour le troisième, et conséquence de* $2|u|\,\varphi(u) \leq u^2+\varphi(u)^2$ *pour le deuxième*).

13. En appliquant la question **7.** avec $h(u) = \ln\big(f(u)\big)$, on obtient

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\Big(f\big(\varphi(u)\big)\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\ .$$

14. Calculons :

$$\begin{aligned}
E(f)-\Phi(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\ln\Big(f\big(\varphi(u)\big)\Big) - \frac{1}{2}\big(u-\varphi(u)\big)^2\right] e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2}\varphi(u)^2 - \frac{u^2}{2} - \ln\big(\varphi'(u)\big) - \frac{u^2}{2} + u\varphi(u) - \frac{1}{2}\varphi(u)^2\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(u\,\varphi(u) - u^2 - \ln\big(\varphi'(u)\big)\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du
\end{aligned}$$

en utilisant les calculs de la question **6.** Par ailleurs, cela ne change de retrancher l'intégrale I de la question **11.**, cette dernière étant nulle. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
E(f)-\Phi(f) &= E(f)-\Phi(f)-I \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(u\varphi(u) - u^2 - \ln\big(\varphi'(u)\big) - u\varphi(u) + u^2 + \varphi'(u) - 1\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\varphi'(u) - 1 - \ln\big(\varphi'(u)\big)\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\ .
\end{aligned}$$

15. De l'inégalité **(1)** du préambule, on déduit $E(f) \geq \Phi(f)$.

16. Une condition nécessaire et suffisante pour que $E(f)$ soit égal à $\Phi(f)$ est que l'on ait $\forall u \in \mathbb{R}\quad \varphi'(u) - 1 - \ln\big(\varphi'(u)\big) = 0$ (*en effet, une fonction continue, positive, et intégrable* *sur* $\mathbb{R}$ *a une intégrale nulle si et seulement si c'est la fonction nulle*). Or, la fonction $x \mapsto \ln x - x + 1$ ne s'annule que pour $x = 1$, la condition citée équivaut donc à $\varphi'(u) = 1$, soit $\varphi(u) = u + C$.

Mais, si $\varphi(x) = x + C$, alors $\varphi^{-1}(x) = x - C$ et la deuxième relation de la question **6.** donne $f(x) = \exp\left(Cx - \dfrac{C^2}{2}\right)$. On vérifie qu'un tel choix de f conduit bien à $\varphi(x) = x + C$: en effet,

$$\int_{-\infty}^{x+C} e^{Cu - \frac{C^2}{2}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x+C} e^{-\frac{(u-C)^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u\ .$$

Il reste enfin à vérifier que la fonction $x \mapsto \exp\left(Cx - \dfrac{C^2}{2}\right)$ appartient à H_0, ce qui est un peu pénible... Allons-y toutefois : pour tout $C \in \mathbb{R}$ fixé, il faut prouver l'existence de $\rho > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 1$, en posant

$$g(x) = \rho\ \exp\left(\rho x^2 - \frac{(x - C)^2}{2}\right) = \rho\ \exp\left((\rho - \frac{1}{2})x^2 + Cx - \frac{C^2}{2}\right)\ .$$

($g(x)$ dépend aussi des paramètres C et ρ). On constate que $g'(x) = \big((2\rho - 1)x + C\big)\ g(x)$ donc, en choisissant $\rho \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, la fonction g est positive et atteint son maximum en $x = \dfrac{C}{1 - 2\rho}$; on calcule la valeur de ce maximum, on trouve $\max\limits_{\mathbb{R}} g = \rho\ \exp\left(\dfrac{\rho C^2}{1 - 2\rho}\right)$. Comme cette expression tend vers zéro lorsque ρ tend vers 0, il est bien possible de choisir $\rho \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ pour lequel ce maximum est inférieur à 1, la condition **(A)** de l'énoncé est alors vérifiée pour une telle valeur de ρ, donc $f \in H$, puis $f \in H_0$ (*évident : translation de la variable dans l'intégrale comme ci-dessus*).

En conclusion, les fonctions f telles que $E(f) = \Phi(f)$ sont les fonctions $x \mapsto \exp\left(Cx - \dfrac{C^2}{2}\right)$, pour tout C réel.