PC*1
DM N°3
Corrigé

1 Exercice 1

1.1 Noyau et image de u

1. La relation de Chasles donne :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0;1]\ u(f)(x) &= \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t\, f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t - x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Sous cette forme, $u(f)$ est clairement continue et même de classe $\mathcal{C}^1$.
   La linéarité de u découle directement de la linéarité de l'intégrale.
   u est bien un endomorphisme de E.

2. D'après le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral, $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0;1]\ [u(f)]'(x) &= x f(x) - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t - x f(x) \\ &= -\int_1^x f(t) dt\end{aligned}$$

   Sous cette forme, la dérivée de $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ie $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et :

$$[u(f)]'' = -f$$

3. Si f est dans le noyau de u alors : $f = -[u(f)]'' = -(0)'' = 0$.
   $\ker(u) = \{0\}$ et u est injective.

4. On déduit des expressions précédentes :
   $u(f)(0) = [u(f)]'(1) = 0$.
   Donc $\mathrm{Im}\,(u) \subset G = \{g \in \mathcal{C}^2([0;1],\mathbb{R})$ tq $g(0) = g'(1) = 0\}$.

   Réciproquement soit $g \in G$.
   $-g'' \in E$

$$\begin{aligned}\forall x \in [0;1]\ u(-g'')(x) &= -\int_0^x t g''(t)\,\mathrm{d}t + x\int_1^x g''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -[t g'(t)]_0^x + \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t + x(g'(x) - g'(1)) \\ &= -x g'(x) + g(x) - g(0) + x g'(x) \\ &= g(x)\end{aligned}$$

$g = u(-g'') \in \mathrm{Im}\,(u)$
Finalement :

$$\mathrm{Im}\,(u) = \{g \in \mathcal{C}^2([0;1],\mathbb{R}) \text{ tq } g(0) = g'(1) = 0\}$$

5. u est injective mais n'est pas surjective donc E n'est pas de dimension finie.

1.2 Quelques exemples

1. $\forall x \in [0;1]\ u(f)(x) = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + x$
2. $\forall x \in [0;1]\ u(f)(x) = -1/6\,x^3 + 1/2\,x$
3. On trouve $u(f) = \dfrac{4}{\pi^2} f$.
   f est un vecteur propre de u, associé à la valeur propre $\dfrac{4}{\pi^2}$.

1.3 Eléments propres de u

1. $\ker(u - 0Id_E) = \ker(u) = \{0\}$ donc 0 n'est pas valeur propre de u.
2. Soit $f \in E$ tq $u(f) = \lambda f$.
   $\lambda \neq 0$ donc $f = \dfrac{1}{\lambda} u(f) = u\left(\dfrac{1}{\lambda} f\right) \in \mathrm{Im}\,(u)$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   De plus $f(0) = f'(1) = 0$.
   On peut dériver $u(f) = \lambda f$ et obtenir $-f = -\dfrac{1}{\omega^2} f''$.
   f est donc solution de l'équation différentielle : $y'' - \omega^2 y = 0$.
   On en déduit qu'il existe deux constantes A et B telles que :
   $\forall x \in [0;1]\ f(x) = A\,\mathrm{e}^{\omega x} + B\,\mathrm{e}^{-\omega x}$
   Les conditions $f(0) = 0$ et $f'(1) = 0$ conduisent au système : $\begin{cases} A + B = 0 \\ \omega(A\,\mathrm{e}^{\omega} - B\,\mathrm{e}^{-\omega}) = 0 \end{cases}$
   D'où : $\begin{cases} B = -A \\ A(\mathrm{e}^{\omega} + \mathrm{e}^{-\omega}) = 0 \end{cases}$
   On en déduit $A = B = 0$, puis $f = 0$
   $\ker(u - \lambda Id_E) \subset \{0\}$ mais l'autre inclusion est triviale donc :
   $\ker(u - \lambda Id_E) = \{0\}$ donc λ n'est pas valeur propre de u.
3. On pose cette fois $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
   Soit $f \in E$ tq $u(f) = \lambda f$.
   $\lambda \neq 0$ donc $f = \dfrac{1}{\lambda} u(f) = u\left(\dfrac{1}{\lambda} f\right) \in \mathrm{Im}\,(u)$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   De plus $f(0) = f'(1) = 0$.
   On peut dériver $u(f) = \lambda f$ et obtenir $-f = \dfrac{1}{\omega^2} f''$.
   f est donc solution de l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = 0$.
   On en déduit qu'il existe deux constantes A et B telles que :
   $\forall x \in [0;1]\ f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
   Les conditions $f(0) = 0$ et $f'(1) = 0$ conduisent au système : $\begin{cases} A = 0 \\ \omega(-A\sin\omega + B\cos\omega) = 0 \end{cases}$
   qui équivaut à :
   $\begin{cases} A = 0 \\ B\cos\omega = 0 \end{cases}$
   $\cos\omega = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \omega = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

On est donc amené à poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \dfrac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$.
Si λ n'est pas de la forme λ_n alors $\cos\omega \neq 0$ et on montre comme dans la question précédente que λ n'est pas valeur propre de u.
Reste à montrer que λ_n est bien valeur propre de u.
On a déjà établi $\ker(u - \lambda_n Id_E) \subset \mathbb{R}f_n$ où f_n est la fonction $\begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2}x\right) \end{cases}$
Réciproquement on détermine l'image de f_n par u :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0;1]\ u(f_n)(x) &= \int_0^x t f_n(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-2t}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right)\right]_0^x + \int_0^x \frac{2}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t \\
&+ x\left[\frac{-2}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right)\right]_x^1 \\
&= \frac{-2x}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) + \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}f_n(x) \\
&+ \frac{2x}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) \\
&= \lambda_n f_n(x)
\end{aligned}$$

Donc λ_n est bien valeur propre de u.

En conclusion :
- les valeurs propres de u sont les nombres λ_n, $n \in \mathbb{N}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}\ E_{\lambda_n}(u) = \mathbb{R}f_n$

4. $\lambda_n \sim \dfrac{1}{n^2\pi^2}$ et tout est positif donc la série de terme général λ_n converge.

1.4 Eléments propres de v

Soit $f \in E$. On a cette fois :

$$\forall x \in [0;1]\ v(f)(x) = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que $v(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$\forall x \in [0;1]\ [v(f)]'(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) = \int_0^x f(t)$$

On en déduit que $v(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec : $[v(f)]'' = f$.

On peut aussi utiliser :

$$\forall x \in [0;1]\ u(f)(x) + v(f)(x) = \int_0^1 (x+t)f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, on a $[v(f)]'(0) = 0$.
Par contre, contrairement à u, il n'y a pas de valeur simple de $v(f)$.
On a tout de même, $v(f)(1) = [v(f)]'(1)$, ce qui peut rendre des services dans la suite.

1. Soit $f \in \ker(v)$.
   $v(f) = 0$ donc, en dérivant deux fois : $f = 0$.
   0 n'est pas valeur propre de v.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
   Soit $f \in E$ telle que $v(f) = \lambda f$.
   $\lambda \neq 0$ donc $f = \dfrac{1}{\lambda} v(f)$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   De plus $f'(0) = 0$.
   En dérivant deux fois $f = \dfrac{1}{\lambda} v(f)$, on obtient $f'' = \omega^2 f$.
   Donc :
   $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in [0;1] f(x) = A\,\mathrm{e}^{\omega x} + B\,\mathrm{e}^{-\omega x}$.
   La condition $f'(0) = 0$ donne $A = B$.
   Notons f_ω la fonction $\begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{-\omega x} \end{cases}$.
   On a : $\ker(v - \lambda Id_E) \subset \mathbb{R} f_\omega$
   Réciproquement, il s'agit de déterminer si f_ω est vecteur propre de v.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0;1]\ v(f_\omega)(x) &= x \int_0^x (\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t})\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{\omega}(\mathrm{e}^{\omega x} - \mathrm{e}^{-\omega x}) + \left[\frac{t}{\omega}\left(\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t}\right)\right]_x^1 - \frac{1}{\omega}\int_x^1 (\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\omega} - \mathrm{e}^{-\omega}}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\left[\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}\right]_x^1 \\
&= \frac{(\omega - 1)\,\mathrm{e}^{\omega} - (\omega + 1)\,\mathrm{e}^{-\omega}}{\omega^2} + \lambda f_\omega(x)
\end{aligned}$$

   On en déduit que :
   λ valeur propre de $v \iff \omega$ solution de (E) : $(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = (x-1)\,\mathrm{e}^{x}$ et dans ce cas le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la fonction f_ω.

3. Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - (x-1)\,\mathrm{e}^{x} \end{cases}$
   φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \varphi'(x) = -x\,(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}) < 0$
   De plus $\varphi(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$.
   D'après le théorème de la bijection, φ s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$.

4. Notons ω_0 la seule solution positive de (E).
   $\varphi(1) = 2\,\mathrm{e}^{-1} > 0$ donc $\omega_0 > 1$ (regarder le tableau de variations).
   Donc $\lambda = \dfrac{1}{\omega_0^2} < 1$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.
   Soit $f \in E$ telle que $v(f) = \lambda f$.
   $\lambda \neq 0$ donc $f = \dfrac{1}{\lambda} v(f)$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   De plus $f'(0) = 0$.
   En dérivant deux fois $f = \dfrac{1}{\lambda} v(f)$, on obtient $f'' = -\omega^2 f$.
   Donc :
   $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in [0;1] f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.
   La condition $f'(0) = 0$ donne $B = 0$.
   Notons g_ω la fonction $\begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(\omega x) \end{cases}$.
   On a : $\ker(v - \lambda Id_E) \subset \mathbb{R} g_\omega$

Réciproquement, il s'agit de déterminer si g_ω est vecteur propre de v.

$$\begin{aligned}\forall x\in[0;1]\ v(g_\omega)(x) &= x\int_0^x \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t+\int_x^1 t\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{x}{\omega}\sin(\omega x)+\left[\frac{t}{\omega}\sin(\omega t)\right]_x^1-\frac{1}{\omega}\int_x^1\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\left[\cos(\omega t)\right]_x^1\\ &= \frac{\omega\sin\omega+\cos\omega}{\omega^2}+\lambda g_\omega(x)\end{aligned}$$

On en déduit que :
λ valeur propre de $v \iff \omega$ solution de (E_2) : $\omega\sin\omega+\cos\omega=0$
et dans ce cas le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la fonction g_ω.

6. (a) Soit $\psi:\omega\mapsto\omega\sin\omega+\cos\omega$.
ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec :
$\forall\omega\in\mathbb{R}\ \psi'(\omega)=\omega\cos(\omega)$.
ψ est donc strictement monotone sur les deux intervalles : $\left[k\pi;k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[k\pi+\frac{\pi}{2};(k+1)\pi\right]$.
$\psi(k\pi)=(-1)^k$ et $\psi\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ sont de même signe.
$\psi\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\psi((k+1)\pi)=(-1)^{k+1}$ sont de signes opposés.
Le théorème de la bijection permet de conclure.

(b) $\omega_k<(k+1)\pi<(k+1)\pi+\frac{\pi}{2}<\omega_{k+1}$: la suite $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
$\omega_k>k\pi+\frac{\pi}{2}$ donc $\omega_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty$.

(c) $k\pi+\frac{\pi}{2}<\omega_k<(k+1)\pi$ donc $\omega_k\sim k\pi$.

(d) $\lambda_k\sim\frac{-1}{k^2\pi^2}$ et tout est de signe constant donc la série de terme général λ_k converge.

(e) On commence par écrire $\omega_k=k\pi+\theta_k$ avec $\theta_k\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.
$\psi(\omega_k)=0$ donne :
$\omega_k\sin\theta_k+\cos\theta_k=0$.
On en déduit $\sin\theta_k=-\frac{\cos\theta_k}{\omega_k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, ce qui conduit compte tenu des intervalles envisagés à :
$\theta_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\pi$.
On a donc $a=\pi$.

On écrit ensuite : $\omega_k=k\pi+\pi+\epsilon_k$ avec $\epsilon_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$.
$\omega_k\sin\theta_k+\cos\theta_k=0$ donne :
$\omega_k\sin\epsilon_k+\cos\epsilon_k=0$ d'où on tire :
$\epsilon_k\sim\sin\epsilon_k=-\frac{\cos\epsilon_k}{\omega_k}\sim\frac{-1}{\omega_k}\sim\frac{-1}{k\pi}$
et finalement :

$$\omega_k=k\pi+\pi-\frac{1}{k\pi}+o\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= -\frac{1}{\omega_k^2} = -\omega_k^{-2} \\
&= -\left(k\pi\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2\pi^2}++o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right)^{-2} \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2\pi^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^{-2} \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2}\left(1-\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2\pi^2}+\frac{(-2)(-2-1)}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2}\left(1-\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2\pi^2}+\frac{3}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2}+\frac{2}{k^3\pi^2}-\frac{2+3\pi^2}{k^4\pi^4}+o\left(\frac{1}{k^4}\right)
\end{aligned}$$

2 Exercice 2

2.1 Premiers exemples et condition nécessaire

1.

$$\begin{aligned}
\forall n\geq 2\ P_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} \\
&= \frac{1}{n}\,\frac{n+1}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

2.

$$\begin{aligned}
\forall n\geq 1\ P_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2} \\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\prod_{k=1}^{n}(2k+1)=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{(2n+1)!}{2^n n!} \\
&= (2n+1)\frac{((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4}
\end{aligned}$$

Avec la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
P_n &\sim 2n(4\pi n)\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{4n}\frac{1}{2^{4n}}\frac{1}{(2\pi n)^2}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{4n} \\
&\sim \frac{8\pi n^2}{4\pi^2 n^2}=\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Donc le produit infini $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ converge et $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}$.

3.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2 \ P_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k+1}\\
&= \frac{1}{n}\,\frac{n+2}{3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Donc le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ converge et $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$.

4. (a) On procède par récurrence sur n.

$P_2=\left(1-\dfrac{(-1)^1}{1}\right)\left(1-\dfrac{(-1)^2}{2}\right)=2\times\dfrac{1}{2}=1.$

On suppose $P_{2n}=1$.

$$\begin{aligned}
P_{2n+2} &= \left(1-\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)\left(1-\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}\right)P_{2n}\\
&= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)\\
&= \frac{2n+2}{2n+1}\times\frac{2n+1}{2n+2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

(b) D'après ce qui précède, $P_{2n}=1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

On en déduit $P_{2n+1}=\left(1-\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)P_{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

Donc $P_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

Donc le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge et $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls.

On suppose que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 0}a_n$ converge ie $\displaystyle P_n=\prod_{k=0}^{n}a_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}l\neq 0$.

Comme les a_n sont tous non nuls, les P_n aussi et :

$\forall n\geq 1\ a_n=\dfrac{P_n}{P_{n-1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{l}{l}=1.$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $a_n=1+\dfrac{1}{n}>0$.

$$\begin{aligned}
\forall n\geq 1\ P_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\\
&= n+1\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty
\end{aligned}$$

$a_n=1+\dfrac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ mais le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.

2.2 Utilisation de la positivité

6. • On suppose que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 0}a_n$ converge.

Les a_n étant strictement positifs, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}\ P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k > 0$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :
$\prod_{k=0}^{+\infty} a_k \geq 0$
Mais par définition, $\prod_{k=0}^{+\infty} a_k \neq 0$ donc $\Pi = \prod_{k=0}^{+\infty} a_k > 0$.
Revenant à $P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Pi > 0$ et prenant le logarithme, on a :
$\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\Pi) \in \mathbb{R}$
Donc la série $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n) = \ln(\Pi)$.
Prenant l'exponentielle, on a :
$\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n)\right)$

- On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ P_n &= \prod_{k=0}^{n} a_k = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k)\right) \quad (a_k > 0) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(a_k)\right) \in \mathbb{R}_+^* \text{ continuité de l'exponentielle} \end{aligned}$$

Donc le produit infini $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge.

7. - On suppose que le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge.
   D'après la question 4), $1 + u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 + u_n > 0$
   Donc, d'après ce qui précède, la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge.
   Mais $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et tout est positif donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
   - On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
   En particulier, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
   Tout est positif donc la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge.
   $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 + u_n > 0$
   Donc, d'après ce qui précède, le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge.

8. $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = n^{(n^{-\alpha})} > 0$
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ln(a_n) = \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha}$
   - **Premier cas :** $\alpha < 0$
   $n^{-\alpha}\ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ donc $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et le produit infini $\prod_{n\geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$ diverge (cf 3)).

- **Deuxième cas :** $\alpha = 0$
  $a_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et le produit infini $\prod_{n\geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$ diverge.
- **Troisième cas :** $\alpha > 0$
  Si $\alpha \leq 1$, $n\ln(a_n) \sim n^{1-\alpha}\ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ donc $\ln(a_n) \geq \frac{1}{n} \geq 0$ à partir d'un certain rang et la série de terme général $\ln(a_n)$ diverge. D'après la question 6), le produit infini $\prod_{n\geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$ diverge.
  Si $\alpha > 1$, $n^{(1+\alpha)/2}\ln(a_n) \sim n^{(1-\alpha)/2}\ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
  Donc $\ln(a_n) = o\left(\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}\right)$ avec $\frac{1+\alpha}{2} > 1$ et la série de terme général $\ln(a_n)$ converge. D'après la question 6), le produit infini $\prod_{n\geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$ converge.

Finalement :

$$\prod_{n\geq 1} n^{(n^{-\alpha})} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

2.3 Quelques résultats dans le cas général

9. (a)
   - La série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée.
   - $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   - $\left(\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante.

   Donc d'après le théorème spécial sur la convergence des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

   (b) $\forall n \geq 2$ $1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} > 0$
   $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + v_n$ avec $v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
   La série $\sum_{n\geq 2} v_n$ converge absolument donc converge.
   $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
   Donc $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \exp\left(\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

10. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \ S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (u_{2k-1} + u_{2k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge donc $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

La suite (S_n) diverge donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

(b)

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \ (1+u_{2n-1})(1+u_{2n}) &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2} \\
&= 1-\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \geq 2$, soit $P_n = \prod_{k=2}^{n}(1+u_k)$.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2 \ P_{2n} &= (1+u_2)\prod_{k=3}^{2n}(1+u_k) = 4\prod_{k=2}^{n}((1+u_{2k-1})(1+u_{2k}) \\
&= 4\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \\
&= 4\times\frac{n+1}{2n} \text{ d'après la première question} \\
&= \frac{2(n+1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2
\end{aligned}$$

De plus $P_{2n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)P_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

On en déduit que le produit infini $\prod_{n\geq 2}(1+u_n)$ converge et que $\prod_{n=2}^{+\infty}(1+u_n) = 2$.

11. $\forall n \in \mathbb{N} \ 1+u_n > 0$
La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument donc converge et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit $|\ln(1+u_n)| \sim |u_n|$ et tout est positif.
La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument donc la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge absolument donc converge.
D'où $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+u_k)\right) \in \mathbb{R}_+^*$.
Donc le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge.