ANALYSE 1
TD
2024-2025
Chapitre 3
Suites et séries de fonctions

941

1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n\,x}{1+n^4\,x^3} \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n^3\,x}{n^4+x^4} \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
3. Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
   La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;b]$?

Exercice 3 *(CCP MP 2021)*

On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
3. Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 4 *(X 2016)*

Etudier la convergence de la suite de fonctions définie par :
$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ f_0(x) = \sin x \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \end{cases}$.

Exercice 5 *(Mines 2021)*

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_d[X]$.

1. Soient $x_0, \ldots, x_d$ des réels deux à deux distincts appartenant à $[0;1]$.
   Montrer qu'il existe une famille de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$: $(L_i)_{0\leq i\leq d}$ telle que :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ P_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} P_n(x_i)L_i$
2. Montrer :
   $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1] \Longleftrightarrow (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$

Exercice 6 *(X 2022)*

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose :
   - La suite de fonctions $(f_n' - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
   - La suite de nombres $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose :
   - La suite de fonctions $(f_n'' - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
   - Les suites de nombres $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

   Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.

2 Modes de convergence d'une série de fonctions

Exercice 7 *(Centrale)*

Soit (a_n) une suite réelle positive décroissante. On pose :

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x)$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0;1]$.
2. Prouver qu'il y a convergence normale sur $[0;1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_k}{k}$ converge.
3. Prouver qu'il y a convergence uniforme sur $[0;1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

3 Continuité

Exercice 8 *(X 2014)*

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ où $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-n^2 x} \end{cases}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On note S sa somme.
2. Montrer que S est continue.

3. Etudier la monotonie de S.
4. Etudier la limite en $+\infty$ de S.
5. Etudier le comportement en 0 de S.

Exercice 9 *(Mines 2018)*

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{x^2+n^2}$ et on note S sa somme.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Limite de S en $+\infty$?

Exercice 10 *(CCP 2019)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction f sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.
3. (a) Montrer que $\forall x>0, f(x+1)+f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   (b) En déduire un équivalent de f quand $x \to +\infty$.

Exercice 11 *(Centrale 2022)*

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
   En déduire un équivalent en 0 et en $+\infty$.

Exercice 12 *(CCP 2017)*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$. (Indication : distinguer le cas où θ est un multiple de 2π)
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. On pose pour n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n.$$
3. Discuter en fonction de θ la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k}$.
4. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ est continue sur $]0, 2\pi[$.

4 Intégration

Exercice 13 *(CCP 2022)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{x(1+x^2)} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x$.
Justifier l'existence de I_n et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 14 *(Centrale 2003)*

Calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x \, \mathrm{d}x$

Exercice 15 *(Mines 2022)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)\,\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n est bien définie quand $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. Donner un équivalent de I_n.

Exercice 16 *(Mines 2014)*

Pour n entier strictement positif, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{n}}}{(1+\frac{t}{n})^n} \mathrm{d}t$.

- I_n est-elle bien définie ?
- Limite de I_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 17 *(Mines 2015)*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{(1-x)^{1/4}} \mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Etudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 18 *(Mines 2016)*

Limite de

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}}$$

(il y a n racines dans l'expression de u_n)

Exercice 19 *(Mines 2022)*

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\sinh(t)} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2+x^2}$$

Exercice 20 *(Mines 2019)*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Vérifier que I_n est bien définie pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}I_n$.
5. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} I_n$.

Exercice 21 *(Mines 2019)*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

Montrer que I converge et l'écrire sous la forme d'une série convergente.

Exercice 22 *(Mines 99)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Etudier la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^\alpha)^n\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23 *(Centrale 2017)*

$g(x) = \arcsin(1-x^2)$

1. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.
2. Donner un équivalent de $\arcsin(t) - \dfrac{\pi}{2}$ en 1.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3\sqrt{n}}}{\pi/2 - \arcsin t}\,\mathrm{d}t$
   Quelle est la limite de u_n ?
   Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

5 Dérivation

Exercice 24 *(Mines 2018)*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$, $u_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.
2. Calcul de $S'(1)$.

Exercice 25 *(Mines 2016, 2021)*

$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x + n}$

1. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Equivalent de S en 0 ?
4. Equivalent de S en $+\infty$?

Exercice 26 *(CCP)*

Domaine de définition, continuité et dérivabilité de la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Exercice 27 *(Centrale 2019)*

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nx\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$$

Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$, la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ et sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$ et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 28 *(Mines 2022)*

$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$

1. Domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f n'est pas dérivable en 0