ANALYSE 1
TD
2024-2025
Chapitre 3
Suites et séries de fonctions
Correction

941

1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n\,x}{1+n^4\,x^3} \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

Correction

1. **Convergence simple**
   Si $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   Si $x > 0$, $f_n(x) \sim \dfrac{nx}{n^4x^3} = \dfrac{1}{n^3x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.
2. **Convergence uniforme**
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+\ f_n'(x) = \dfrac{n(1-2n^4x^3)}{(1+n^4x^3)^2}$
   f_n croît sur $\left[0; (2n^4)^{-1/3}\right]$ de 0 à $\dfrac{2^{2/3}}{3}n^{-1/3}$ puis décroît de $\dfrac{2^{2/3}}{3}n^{-1/3}$ à 0.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \|f_n\|_\infty = \dfrac{2^{2/3}}{3}n^{-1/3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.
   Autre méthode
   Si on examine le dénominateur, au voisinage de 0 c'est 1 qui est prépondérant mais quand on s'éloigne de 0 c'est n^4x^3.
   $1 = n^4x^3$ pour $x = n^{-\frac{4}{3}}$
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [0; n^{-\frac{4}{3}}]\ \ |f_n(x)| = f_n(x) \le n \le n^{-1/3}$
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \ge n^{-\frac{4}{3}}\ \ |f_n(x)| \le \dfrac{nx}{n^4x^3} = n^{-3}x^{-2} \le n^{-3}\left(n^{-\frac{4}{3}}\right)^{-2} = n^{-1/3}$
   Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ |f_n(x)| = f_n(x) \leq n^{-1/3}$ indépendant de x et converge vers 0
Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n^3\, x}{n^4 + x^4} \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
3. Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
   La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;b]$?

Correction

1. **Convergence simple**
   Si $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   Si $x \neq 0$, $f_n(x) \sim \dfrac{n^3 x}{n^4} = \dfrac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.

2. **Convergence uniforme**
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R} \ f_n'(x) = \dfrac{n^3(n^4 - 3x^4)}{(n^4 + x^4)^2}$
   Comme les fonctions f_n sont impaires, on peut se contenter des variations sur $\mathbb{R}_+$.
   f_n croît sur $\left[0; \dfrac{n}{3^{1/4}}\right]$ de 0 à $\dfrac{3^{3/4}}{4}$ puis décroît de $\dfrac{3^{3/4}}{4}$ à 0.
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ \|f_n\|_\infty = \dfrac{3^{3/4}}{4}$
   La suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
   La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a;b]$:
   Soit $c = \max(|a|, |b|)$.
   $\dfrac{n}{3^{1/4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc :
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0 \ \dfrac{n}{3^{1/4}} \geq c$
   $\forall n \geq n_0 \ \forall x \in [a;b] \ \ |f_n(x)| \leq f_n(c)$ indépendant de x et $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 3 *(CCP MP 2021)*

On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Correction

1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \dfrac{n+2}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 1$.
   Si $x \neq 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.
   En effet, $|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-nx^2} |\cos(\sqrt{n}x)|$ et $0 \leq \mathrm{e}^{-nx^2} |\cos(\sqrt{n}x)| \leq \mathrm{e}^{-nx^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On en déduit que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et f non continue en 0 donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.
   Ou bien :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} (|f_n(x) - f(x)|) \geq \left| f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| = \dfrac{n+1}{n+2} \mathrm{e}^{-1} \cos(1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \cos(1)$
   Donc la suite $\left(\sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} (|f_n(x) - f(x)|) \right)$ ne converge pas vers 0 et la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$.
   On a : $\forall x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-na^2}$ (majoration indépendante de x).
   Par ailleurs, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-na^2} = 0$ (car $\dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-na^2} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-na^2}$).
   Donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+^*} (|f_n(x) - f(x)|) \geq \left| f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| = \dfrac{n+1}{n+2} \mathrm{e}^{-1} \cos(1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \cos(1)$
   Donc la suite $\left(\sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+^*} (|f_n(x) - f(x)|) \right)$ ne converge pas vers 0 et la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 *(X 2016)*

Etudier la convergence de la suite de fonctions définie par :
$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \ f_0(x) = \sin x \\ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} \ f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \end{cases}$.

Correction
On commence par étudier la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$\begin{cases} u_0 \in [-1; 1] \\ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$
$\sin([-1; 1]) \subset \sin(\mathbb{R}) = [-1; 1]$ donc la suite est bien définie et :
$\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \in [-1; 1]$
Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que :
$\forall n \in \mathbb{N} \ |u_{n+1}| \leq |u_n|$
Supposons tout d'abord $u_0 \in [0; 1]$.

sin étant continue et croissante sur $[0;1]$, $\sin([0;1]) = [0;\sin 1] \subset [0;1]$ donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in [0;1]$.
De ce qui précède, on déduit que (u_n) est décroissante et minorée par 0.
On en déduit que (u_n) converge vers l qui vérifie $\sin l = l$.
Une étude de la fonction $x \mapsto \sin x - x$ permet de montrer que $l = 0$.
Supposons maintenant $u_0 \in [-1;0]$.
On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$\begin{cases} v_0 = -u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = \sin(v_n) \end{cases}$
Une récurrence élémentaire permet de prouver :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = -v_n$
On en déduit que (u_n) converge vers 0.
On a donc prouvé que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Etudions maintenant la convergence uniforme.
Revenons à la suite (u_n) dans le cas où u_0 est positif.
On définit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ w_{n+1} = \sin(w_n) \end{cases}$
Une récurrence élémentaire permet de prouver :
$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq u_n \leq w_n$
Compte tenu des remarques précédentes, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x)| \leq w_n$ indépendant de x et convergeant vers 0.
On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Exercice 5 *(Mines 2021)*

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_d[X]$.

1. Soient $x_0, \ldots, x_d$ des réels deux à deux distincts appartenant à $[0;1]$.
   Montrer qu'il existe une famille de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$: $(L_i)_{0\leq i\leq d}$ telle que :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ P_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} P_n(x_i)L_i$
2. Montrer :
   $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1] \iff (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$

Correction

1. Je vais donner une solution qui ne présuppose pas la connaissance des polynômes d'interpolation de Lagrange.
   Si la famille existe, c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}_d[X]$ dont le cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_d[X]$.
   C'est donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Les coordonnées d'un polynôme dans cette base sont liées à ses coordonnées dans la base canonique par :
   $\begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_d & \ldots & x_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$
   La matrice de passage de la base $(L_i)_{0\leq i\leq d}$ vers la base canonique est donc $VdM(x_0, \ldots, x_d)$.

Passons à la solution de la première question.
les x_i étant deux à deux distincts, la matrice $VdM(x_0,\dots,x_d)$ est inversible.
Il existe donc une base $(L_i)_{0\leq i\leq d}$ de $\mathbb{R}_d[X]$ telle que la matrice de passage de la base canonique vers la base $(L_i)_{0\leq i\leq d}$ soit $VdM(x_0,\dots,x_d)^{-1}$. En d'autres termes, les coefficients du polynôme L_i se lisent (de bas en haut pour les degrés croissants) dans la colonne d'indice $i+1$ de $VdM(x_0,\dots,x_d)^{-1}$.
Si on note $\begin{pmatrix} l_0\\ \vdots\\ l_d\end{pmatrix}$ les coordonnées d'un polynôme P dans la base $(L_i)_{0\leq i\leq d}$ de $\mathbb{R}_d[X]$, on a :
$\begin{pmatrix} a_0\\ \vdots\\ a_d\end{pmatrix} = VdM(x_0,\dots,x_d)^{-1}\begin{pmatrix} l_0\\ \vdots\\ l_d\end{pmatrix}$ donc :
$\begin{pmatrix} l_0\\ \vdots\\ l_d\end{pmatrix} = VdM(x_0,\dots,x_d)\begin{pmatrix} a_0\\ \vdots\\ a_d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0)\\ \vdots\\ P(x_n)\end{pmatrix}$

2. La convergence uniforme entraîne toujours la convergence simple.
Réciproquement, on suppose que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f.
Soit P le polynôme $\displaystyle\sum_{i=0}^{d} f(x_i)L_i$

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\ \|P_n-P\|_\infty &= \left\|\sum_{i=0}^{d}(P_n(x_i)-f(x_i))L_i\right\|_\infty\\ &\leq \sum_{i=0}^{n}|P_n(x_i)-f(x_i)|\,\|L_i\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers P.
Donc la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers P.
Par unicité de la limite simple, $f=P$.
Finalement, la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers f.

Exercice 6 *(X 2022)*

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose :
   - La suite de fonctions $(f_n'-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
   - La suite de nombres $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose :
   - La suite de fonctions $(f_n''-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
   - Les suites de nombres $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

   Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   f_n est solution de l'équation différentielle $y' - y = f_n'(x) - f_n(x)$.
   On résout cette équation par la méthode de la variation de la constante.
   ESSM : $y' - y = 0$
   Solution générale de l'ESSM : $y(x) = C\,\mathrm{e}^x$.
   Variation de la constante : $C'(x)\,\mathrm{e}^x = f_n'(x) - f_n(x)$
   D'om la solution générale de l'équation :
   $y(x) = C\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \left(f_n'(t) - f_n(t)\right)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
   On en déduit :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ f_n(x) = f_n(0)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \left(f_n'(t) - f_n(t)\right)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
   Soit g la limite de la suite de fonctions $(f_n' - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n' - f_n$ est continue sur $[0;1]$ et la suite de fonctions $(f_n' - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $[0;1]$ donc g est continue sur $[0;1]$.
   Soit l la limite de la suite de nombres $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{rl} & \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ \left|f_n(x) - \left(l\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\ = & \left|(f_n(0) - l)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \left(f_n't) - f(t) - g(t)\right)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \\ \leq & |f_n(0) - l|\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \left|(f_n't) - f(t) - g(t)\right|\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ \leq & |f_n(0) - l|\,\mathrm{e} + \mathrm{e} \displaystyle\int_0^x \left\|f_n' - f_n - g\right\|_\infty\,\mathrm{d}t \\ \leq & |f_n(0) - l|\,\mathrm{e} + \mathrm{e}\left\|f_n' - f_n - g\right\|_\infty \text{ indépendant de } x \text{ et } \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}$$

   Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction $x \mapsto l\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$
2. **Indication fournie par l'examinateur** (quand ?)
   L'opérateur $f \mapsto f'' - f$ peut s'exprimer avec $f \mapsto f' - f$.
   En fait $f'' - f = F' + F$ si $F = f' - f$.
   Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, on a :
   $\forall x \in [0;1]\ f(x) = f(0)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x (f'(t) - f(t))\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
   En raisonnant comme à la première question, on a pour F de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$:
   $\forall x \in [0;1]\ F(x) = F(0)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^x (F'(t) + F(t))\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$
   On en déduit, en posant $F_n = f_n' - f_n$:

$$\begin{array}{rl} & \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ f_n(x) \\ = & f_n(0)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \left(F_n(0)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} \int_0^t (f_n''(u) - f_n(u))\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ = & f_n(0)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x F_n(0)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x \int_0^x \left(\mathrm{e}^{-2t} \int_0^t (f_n''(u) - f_n(u))\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\ = & f_n(0)\,\mathrm{e}^x + F_n(0)\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-2t} \int_0^t (f_n''(u) - f_n(u))\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

   Soit g_1 la limite de la suite de fonctions $(f_n'' - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n'' - f_n$ est continue sur $[0;1]$ et la suite de fonctions $(f_n'' - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

converge uniformément vers g_1 sur $[0;1]$ donc g_1 est continue sur $[0;1]$.
La fonction $g_2 : t \mapsto \int_0^t g_1(u)\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$ est donc bien définie. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.
La fonction $g_3 : t \mapsto \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-2t} g_2(t)\,\mathrm{d}t$ est donc bien définie. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ \left|\mathrm{e}^x \int_0^x \left(\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t (f_n''(u) - f_n(u))\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t - g_3(x)\right| \\
= \ & \mathrm{e}^x \left|\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t (f_n''(u) - f_n(u))\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u - \mathrm{e}^{-2t} g_2(t)\right)\mathrm{d}t\right| \\
\leq \ & \int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\left|\int_0^t (f_n''(u) - f_n(u))\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u - \int_0^t g_1(u)\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}t \\
\leq \ & \int_0^1 \left(\int_0^t |f_n''(u) - f_n(u) - g_1(u)|\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
\leq \ & \int_0^1 \left(\int_0^t \|f_n'' - f_n - g_1\|_\infty\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
\leq \ & \|f_n'' - f_n - g_1\|_\infty
\end{aligned}$$

En particulier $\mathrm{e}^1 \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t (f_n''(u) - f_n(u))\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} g_3(1)$. Or :
$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(1) = f_n(0)\,\mathrm{e}^1 + F_n(0)\dfrac{\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}}{2} + \mathrm{e}^1 \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t (f_n''(u) - f_n(u))\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$
avec $\dfrac{\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}}{2} \neq 0$ donc la suite de nombres $(F_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On note alors $l_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0)$ et $l_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0)$

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ \left|f_n(x) - l_1\,\mathrm{e}^x - l_2\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} - g_3(x)\right| \\
\leq \ & |f_n(0) - l_1|\,\mathrm{e}^x + |F_n(0) - l_2|\,\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \left|\mathrm{e}^x \int_0^x \left(\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t (f_n''(u) - f_n(u))\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t - g_3(x)\right| \\
\leq \ & |f_n(0) - l_1|\,\mathrm{e}^1 + |F_n(0) - l_2|\,\frac{\mathrm{e}^1 + 1}{2} + \|f_n'' - f_n - g_1\|_\infty \\
& \text{indépendant de } x \text{ et } \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction $x \mapsto l_1\,\mathrm{e}^x + l_2\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + g_3(x)$

2 Modes de convergence d'une série de fonctions

Exercice 7 *(Centrale)*

Soit (a_n) une suite réelle positive décroissante. On pose :

$$u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0;1]$.

2. Prouver qu'il y a convergence normale sur $[0;1]$ si et seulement si $\sum \frac{a_k}{k}$ converge.
3. Prouver qu'il y a convergence uniforme sur $[0;1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Correction

1. Soit $x \in [0;1]$ fixé.
   - **Premier cas :** $x \in [0;1[$
     $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq a_n x^n(1-x) \leq (1-x)a_0 x^n$
     Donc la série de terme général $u_n(x)$ converge.
   - **Deuxième cas :** $x = 1$
     $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n(1) = 0$
     Donc la série de terme général $u_n(1)$ converge.

   Finalement, $\sum u_n$ converge simplement sur $[0;1]$.
2. Soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n(1-x) \end{cases}$.
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x)$
   f_n croît sur $\left[0;\frac{n}{n+1}\right]$ de 0 à $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$ puis décroît de $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$ à 0.
   Un calcul classique donne $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n\,\mathrm{e}}$.
   Donc $\|u_n\|_\infty = a_n f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \sim \frac{a_n}{n\,\mathrm{e}}$.
   On conclut facilement.
3. Comme on a établit la convergence simple, on peut utiliser le reste.
   Du fait de la décroissance de la suite (a_n), on a l'encadrement suivant :
   $$\forall x \in [0;1]\ l(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k(1-x) \leq a_{n+1}(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$$
   On en déduit :
   $$\forall x \in [0;1]\ l x^{n+1} \leq R_n(x) \leq a_{n+1}x^{n+1}$$
   puis :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\ l \leq \|R_n\|_\infty \leq a_{n+1}$$
   et on conclut facilement.

3 Continuité

Exercice 8 *(X 2014)*

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ où $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-n^2 x} \end{cases}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On note S sa somme.
2. Montrer que S est continue.

3. Etudier la monotonie de S.
4. Etudier la limite en $+\infty$ de S.
5. Etudier le comportement en 0 de S.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.
   $n^2\, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge (absolument).
   On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   • La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
   Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$ $(0 < a < b)$.
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \max_{x\in[a;b]} |f_n(x)| = f_n(a)$, terme général d'une série convergente
   On en déduit que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. S est une somme de fonctions décroissante donc [1] S est décroissante.
4. • $f_0(x) = 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$
   • $\forall n \in \mathbb{N}^*\ f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
   • La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[1;+\infty[$:
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \sup_{x\in[1;+\infty[} |f_n(x)| = f_n(1)$, terme général d'une série convergente
   Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$.
   Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[1;+\infty[$
   D'après le théorème de la double limite : $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$
5. Par comparaison série intégrale :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t \leq S(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t$
   En faisant le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $s = \sqrt{x}\,t$, on a :
   $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{I}{\sqrt{x}}$ avec $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$
   On en déduit $S(x) \sim \dfrac{I}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$

Exercice 9 *(Mines 2018)*

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x}{x^2+n^2}$ et on note S sa somme.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Limite de S en $+\infty$?

Correction

1. démonstration facile, même s'il s'agit d'une somme infinie

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x^2+n^2} \end{cases}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue.
   - La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$:
     Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
     Soit $c = \max(|a|, |b|)$.
     $\forall x \in [a;b]\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \left|\dfrac{x}{x^2+n^2}\right| \leq \dfrac{c}{n^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
2. On fixe $x > 0$.
   La fonction $t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Par comparaison série-intégrale on obtient :
   $$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$
   Mais :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$
   et
   $$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$
   donc la limite cherchée est $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 10 *(CCP 2019)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction f sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. (a) Montrer que $\forall x > 0, f(x+1) + f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   (b) En déduire un équivalent de f quand $x \to +\infty$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.
   - $\forall n \in \mathbb{N}\ x + n > 0$
     Donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est alternée.
   - $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{x+n}\right|\right)_{n\geq 0} = \left(\dfrac{1}{n+x}\right)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   - $\dfrac{(-1)^n}{x+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'après le TSCSA, $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge.

Donc, si on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x} \end{cases}$ alors $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\sum f_n$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

  Comme $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut définir $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n$.

  Soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a;b]\ |R_n(x)| & \leq & |f_{n+1}(x)| \text{ d'après le TSCSA cf 1)} \\ & \leq & \dfrac{1}{n+1+x} \leq \dfrac{1}{n+1+a} \\ & & \text{indépendant de } x \text{ et } \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}$$

  Donc (R_p) CVU vers 0 sur $[a;b]$.
  Donc (R_p) CVU vers 0 sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
  Donc $\sum f_n$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
  En fait, il y a même convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ |R_n(x)| & \leq & |f_{n+1}(x)| \text{ d'après le TSCSA cf 1)} \\ & \leq & \dfrac{1}{n+1+x} \leq \dfrac{1}{n+1} \\ & & \text{indépendant de } x \text{ et } \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. (a)

$$\begin{array}{rcl} \forall x > 0\ f(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \\ & = & \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1+x} \\ & = & \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1+x} = \dfrac{1}{x} - f(x+1) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} \forall x > 0\ |f(x) - f(x+1)| & = & \left| \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x+1} \right| \\ & = & \left| \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+x+1)} \right| \\ & \leq & \dfrac{1}{x(x+1)} \text{ avec le TSCSA (à détailler)} \end{array}$$

On en déduit : $f(x+1) = f(x) + o\left(\frac{1}{x}\right)$ puis :
$f(x) + f(x) + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$
Donc $f(x) = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$.

Une autre méthode est possible.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$:
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ |f_n'(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
  Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut la dériver terme à terme.
Comme f_0 est de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$
Mais à x fixé cette série vérifie les hypothèses du théorème sur la convergence de certaines séries alternées :

- $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ est alternée
- La suite $\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(n+x)^2}\right)$ est décroissante et converge vers 0

Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f'(x) < 0$ ($f'(x)$ a le même signe que le premier terme de la somme).
Donc f est décroissante et :
$\forall x > 0\ 2f(x+1) \leq f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x} \leq 2f(x)$
On en déduit :
$\forall x > 1\ \frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1} \sim \frac{1}{x}$
Et on retrouve : $f(x) \sim \frac{1}{2x}$

Exercice 11 *(Centrale 2022)*

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
   En déduire un équivalent en 0 et en $+\infty$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x} \end{cases}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.
   - $\forall n \in \mathbb{N}\ x+n>0$
     Donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est alternée.
   - $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{x+n}\right|\right)_{n\geq 0} = \left(\dfrac{1}{n+x}\right)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   - $\dfrac{(-1)^n}{x+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

   D'après le théorème spécial sur les séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge.
   En d'autres termes, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{P}(k)$: f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
   $\forall x>0\ f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^{k+1}}$

   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Il s'agit de montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la formule pour $f^{(0)}(x) = f(x)$ étant facile à vérifier.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
     En effet le théorème spécial sur les séries alternées permet d'affirmer :
     $\forall x>0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{x+n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ indépendant de x et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
     Donc la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{(n+x)^{k+1}} \end{cases}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
     $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x>0\ g_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(k+1)}{(n+x)^{k+2}}$
   - La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$: c'est implicite dans l'hypothèse de récurrence.
   - La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} g_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
     $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \ |g_n'(x)| = \dfrac{k+1}{(x+n)^{k+2}} \leq \dfrac{k+1}{n^{k+2}}$ indépendant de x et terme général

d'une série convergente ($k+2>1$).
On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que la fonction $f^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ie la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ et :
$\forall x>0\ f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}\right)'(x) = (-1)^k k! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(k+1)}{(n+x)^{k+2}} = (-1)^{k+1}(k+1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^{k+2}}$
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Donc $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$
Finalement, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :
$\forall k\in\mathbb{N}\ \forall x>0\ f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^{k+1}}$

3.

$$\begin{aligned}
\forall x>0\ f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\\
&= \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x}\\
&= \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = \frac{1}{x} - f(x+1)
\end{aligned}$$

$f(x+1) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} f(1)\in\mathbb{R}$ (car f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$)
$\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$
On en déduit $f(x) \sim_0 \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
\forall x>0\ |f(x)-f(x+1)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1}\right|\\
&= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+x+1)}\right|
\end{aligned}$$

On fixe $x>0$.
- La série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+x+1)}$ est alternée.
- La suite $\left(\left|\frac{(-1)^n}{(n+x)(n+x+1)}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\frac{(-1)^n}{(n+x)(n+x+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

D'après le théorème spécial sur les séries alternées :$|f(x)-f(x+1)| \leq \frac{1}{x(x+1)}$
On en déduit : $f(x+1) = f(x) + o\left(\frac{1}{x}\right)$ puis :

$f(x)+f(x)+o\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$
Donc $f(x)=\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(x)\sim_{+\infty}\frac{1}{2x}$.

Exercice 12 *(CCP 2017)*

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}$. (Indication : distinguer le cas où θ est un multiple de 2π)
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. On pose pour n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})S_k+a_nS_n.$$

3. Discuter en fonction de θ la nature de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k}$.
4. Montrer que $x\mapsto\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$ est continue sur $]0,2\pi[$.

Correction

1. $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}=\sum_{k=1}^{n}=n$ si $\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$.
$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}=\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{i\theta)}\right)^k=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{1-\mathrm{e}^{in\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{i(n+1)\theta/2}\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ sinon car $\mathrm{e}^{i\theta}\neq 1$.
2.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*\ \sum_{k=1}^{n}a_kb_k &= \sum_{k=1}^{n}a_k(S_k-S_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}a_kS_k-\sum_{k=1}^{n}a_kS_{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}a_kS_k-\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}S_k\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})S_k+a_nS_n \text{ car } S_0=0\end{aligned}$$

On peut également raisonner par récurrence.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n):\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})S_k+a_nS_n$
Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_1b_1$ et $\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})S_k+a_nS_n=a_1S_1=a_1b_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n + a_{n+1} b_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + (a_n - a_{n+1}) S_n + a_{n+1} S_n + a_{n+1} b_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} (S_n + b_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} S_{n+1}
\end{aligned}$$

3. La série diverge si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, converge sinon.
   En effet si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ c'est la série harmonique $\sum \dfrac{1}{k}$.
   Par contre, si on suppose $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$:
   on pose $S_k(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$ et on a par application de la question précédente :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) S_k(\theta) + \dfrac{S_n(\theta)}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{S_k(\theta)}{k(k+1)} + \dfrac{S_n(\theta)}{n}$
   Il résulte du calcul de la première question, qu'à θ fixé, la suite $(S_n(\theta))$ est bornée.
   Donc $\dfrac{S_n(\theta)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
   De plus $\dfrac{S_k(\theta)}{k(k+1)} = O_{k\to+\infty}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ donc la série de terme général $\dfrac{S_k(\theta)}{k(k+1)}$ converge absolument donc converge.
   On en déduit que la série $\sum_{k\geq 1} \dfrac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k}$ converge avec $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{S_k(\theta)}{k(k+1)}$

4. $\forall \theta \in]0; 2\pi[\ \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{S_k(\theta)}{k(k+1)}$
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $f_k \begin{cases}]0; 2\pi[\to \mathbb{C} \\ \theta \mapsto \dfrac{S_k(\theta)}{k(k+1)} \end{cases}$.
   - Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f_k est continue sur $]0; 2\pi[$.
   - Pour tout $\epsilon \in]0; \pi[$ la série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément sur $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$:
     $\forall \theta \in [\epsilon; 2\pi - \epsilon] \ \forall k \in \mathbb{N}^* \ \ |S_k(\theta)| \leq \dfrac{1}{\sin(\theta/2)} \leq \dfrac{1}{\sin(\epsilon/2)}$
     Donc :
     $\forall \theta \in [\epsilon; 2\pi - \epsilon] \ \forall k \in \mathbb{N}^* \ \ |f_k(\theta)| \leq \dfrac{1}{k^2 \sin(\epsilon/2)}$ indépendant de θ et terme général d'une série convergente.
     Donc la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement sur $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$.
     Donc la série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément sur $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$.

La fonction $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ est donc continue sur tout segment $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$ avec $\epsilon \in]0; \pi[$. Elle est donc continue sur $]0; 2\pi[$.
La fonction $\theta \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k}$ est donc continue sur $]0; 2\pi[$.
Remarque
On peut aussi écrire :
$\forall \theta \in]0; 2\pi[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k} = \frac{1}{\sin(\theta/2)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta/2} \sin(n\theta/2)}{k(k+1)}$
et la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$ en entier.

Il n'y a plus qu'à prendre la partie imaginaire pour prouver que la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ est continue sur $]0, 2\pi[$.

4 Intégration

Exercice 13 *(CCP 2022)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{x(1+x^2)} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x$.
Justifier l'existence de I_n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Correction
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n}{x(1+x^2)} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \end{cases}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $f_n(x) \sim_0 \frac{n}{x} \times \frac{x}{n} = 1$ donc f_n est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
- En $+\infty$, $1 + \frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}$ et ce sont des infiniment grands donc :
  $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim \ln\left(\frac{x}{n}\right) = \ln(x) - \ln(n) \sim \ln(x)$.
  Donc $f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{n \ln(x)}{x^3}$.
  Donc $f_n(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

f_n est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On applique ensuite le théorème de convergence dominée.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \ |f_n(x)| = \dfrac{n}{x(1+x^2)} \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ (concavité de ln)
avec $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$
Donc $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 14 *(Centrale 2003)*

Calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x \ \mathrm{d}x$

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \cos x \text{ si } x \in [0;n] \\ x \mapsto 0 \text{ si } x > n \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0 \ x < n$

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0 \ f_n(x) &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)\cos(x) = \exp\left(n\left(-\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\cos(x) \\ &= \mathrm{e}^{-x+o(1)}\cos(x)\end{aligned}$$

  La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \end{cases}$.
- La fonction f est continue.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Soit $x \in [0;n[$.
  $|f_n(x)| = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)\right)|\cos(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}$ (inégalité $\ln(1+t) \leq t$ à justifier)
  C'est trivial pour $x \geq n$ donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ |f_n(x)| \leq \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$ avec φ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc la limite cherchée est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Re e\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-1)x}\,\mathrm{d}x\right) = \Re e\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(i-1)x}}{i-1}\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \Re e\left(\frac{1}{1-i}\right) = \Re e\left(\frac{1+i}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 15 *(Mines 2022)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)\,\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n est bien définie quand $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. Donner un équivalent de I_n.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\ln(t)\,\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}} \end{cases}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - $f_n(t) = o_{+\infty}(\mathrm{e}^{-nt})$ avec $n > 0$ (donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-nt}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$)
   - $t^{3/4} f_n(t) = t^{1/4} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$ donc $f_n(t) = o_0\left(\dfrac{1}{t^{3/4}}\right)$ avec $\dfrac{3}{4} < 1$ (donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/4}}$ est intégrable sur $]0; 1]$)

   Donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle.
   - La fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - L'hypothèse de domination est vérifiée :
     $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall t > 0 \ \ |f_n(t)| \leq |f_1(t)|$
     avec $|f_1|$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On en déduit que la suite (I_n) converge vers 0.
3. On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $t = \dfrac{x}{n}$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x/n)\,\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x/n}} \frac{\mathrm{d}x}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) - \ln(n)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x > 0$ (facile à justifier) donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \neq 0$ et :
   $I_n \sim -\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
   L'intégrale se calcule en faisant le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x = t^2$:
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t} 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$
   Finalement : $I_n \sim -\sqrt{\dfrac{\pi}{n}} \ln(n)$

Exercice 16 *(Mines 2014)*

Pour n entier strictement positif, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{n}}}{(1 + \frac{t}{n})^n}\,\mathrm{d}t$.
- I_n est-elle bien définie ?
- Limite de I_n quand n tend vers $+\infty$?

Correction

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{t^{-\frac{1}{n}}}{(1+\frac{t}{n})^n} \end{cases}$

  f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
  f_n est positive donc la convergence de I_n se confond avec l'intégrabilité de f_n.
  $f_n(t) \sim_0 t^{-\frac{1}{n}}$ donc :
  f_n intégrable sur $]0;1] \iff \dfrac{1}{n} < 1 \iff n \geq 2$
  $f_n(t) \sim_{+\infty} \dfrac{n^n}{t^{n+1/n}}$ et $n + \dfrac{1}{n} > 1$ donc f_n est toujours intégrable sur $[1;+\infty[$.
  Finalement :
  $$f_n \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \iff n \geq 2$$

- On applique le théorème de convergence dominée :
  — Pour tout $n \geq 2$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
  — (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$
  — f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
  — **Domination**
    — $\forall n \geq 2\ \forall t \in]0;1]\ \ |f_n(t)| \leq t^{-\frac{1}{n}} \leq t^{-\frac{1}{2}}$
    — $\forall n \geq 2\ \forall t \in [1;+\infty[\ |f_n(t)| \leq \dfrac{1}{(1+\frac{t}{n})^n}$
    Avec la formule du binôme :
    $\forall n \geq 2\ \forall t \in [1;+\infty[\ \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \geq 1 + t + \dfrac{n(n-1)}{2}\dfrac{t^2}{n^2} \geq \dfrac{(n-1)}{2\,n}t^2 \geq \dfrac{t^2}{4}$
    $\forall n \geq 2\ \forall t \in [1;+\infty[\ |f_n(t)| \leq \dfrac{4}{t^2}$
    On peut donc dominer par $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{-\frac{1}{2}} \text{ si } t < 1 \\ t \mapsto \dfrac{4}{t^2} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$
    φ est bien continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Donc $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$

Exercice 17 *(Mines 2015)*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{(1-x)^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Etudier la nature de la série de terme général u_n.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^n \ln x}{(1-x)^{1/4}} \end{cases}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $]0;1[$.
   En 1, $\ln x \sim x - 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est prolongeable en une fonction continue

sur $]0;1]$ (en posant $f_n(1)=0$).
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$ (en posant $f_n(0)=0$).
Enfin $f_0(x)=O_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0;1[$.

2. • Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $]0;1[$.
   • La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f=0$ sur $]0;1[$.
   • f est continue sur $]0;1[$.
   • L'hypothèse de domination est vérifiée : on prend $\varphi=|f_0|$.

   On en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. $\forall N\in\mathbb{N}\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N}u_n=\int_0^1\frac{\ln x}{(1-x)^{5/4}}(1-x^{N+1})\,\mathrm{d}x$

   Pour tout $N\in\mathbb{N}$, soit $g_N\begin{cases}]0;1[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{\ln x}{(1-x)^{5/4}}(1-x^{N+1})\end{cases}$.
   • Pour tout $N\in\mathbb{N}$, g_N est continue sur $]0;1[$.
   • La suite de fonctions $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0;1[$ vers la fonction $g\begin{cases}]0;1[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{\ln x}{(1-x)^{5/4}}\end{cases}$
   • La fonction g est continue sur $]0;1[$.
   • **Hypothèse de domination**
     $\forall N\in\mathbb{N}^*\ \forall x\in]0;1[\ |g_N(x)|=\dfrac{|\ln x|}{(1-x)^{5/4}}(1-x^{N+1})\le\psi(x)=\dfrac{2\,|\ln x|}{(1-x)^{5/4}}$
     avec ψ continue, positive et intégrable sur $]0;1[$:
     $\psi(x)\sim_{0^+}\ln(x)$ avec ln intégrable en 0
     $\psi(x)\sim_{1^-}\dfrac{2}{(1-x)^{1/4}}$ avec $x\mapsto\dfrac{2}{(1-x)^{1/4}}$ intégrable en 1

   D'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}u_n\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\ln x}{(1-x)^{5/4}}\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$.
   On en déduit que la série de terme général u_n converge.

   Remarque
   On peut se passer du théorème de convergence dominée : On remarque :
   $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le 0$
   $\forall N\in\mathbb{N}\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-u_n)=\int_0^1\frac{-\ln x}{(1-x)^{5/4}}(1-x^{N+1})\,\mathrm{d}x\le\int_0^1\psi(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$ (après avoir justifié l'intégrabilité de ψ sur $]0;1[$ comme ci-dessus)
   La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\ge0}(-u_n)$ est majorée donc la série $\displaystyle\sum_{n\ge0}(-u_n)$ converge.
   On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\ge0}u_n$ converge mais on n'a plus l'égalité :
   $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\int_0^1\frac{\ln(x)}{(1-x)^{5/4}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 18 *(Mines 2016)*

Limite de

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}}$$

(il y a n racines dans l'expression de u_n)

Correction

Considèrons une suite récurrente définie par :

$\begin{cases} v_0 \in [0;1] \\ v_{n+1} = \sqrt{2+v_n} \end{cases}$

Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{2+x} \end{cases}$.

g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (inutile de la dériver).

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) - x = \sqrt{2+x} - x = \dfrac{2+x-x^2}{2+\sqrt{2+x}} = -\dfrac{(x+1)(x-2)}{2+\sqrt{x}}$

g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $g(0) = \sqrt{2} \geq 0$ et $g(2) = 2$ donc l'intervalle $[0;2]$ est stable par g.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et :

$\forall n \in \mathbb{N} \ v_n \in [0;2]$

Donc :

$\forall n \in \mathbb{N} \ v_{n+1} - v_n = g(v_n) - v_n = -\dfrac{(v_n+1)(v_n-2)}{2+\sqrt{v_n}} \geq 0$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers $l \in [0;2]$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ v_{n+1} = g(v_n)$

Donc à la limite : $l = g(l)$.

Comme $l \in [0;2]$, $l = 2$.

On définit alors une suite de fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, (f_n) par :

$\begin{cases} \forall x \in [0;1] \ f_0(x) = x \\ \forall x \in [0;1] \ f_{n+1}(x) = \sqrt{2+f_n(x)} \end{cases}$

On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f_n(x)} \,\mathrm{d}x$

On applique alors le théorème de convergence dominée.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{f_n}$ est continue sur $[0;1]$:
  Il résulte de l'étude préalable de la suite (v_n) que :
  $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [0;1] \ f_n(x) \geq 0$
  On en déduit :
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ f_n(x) = \sqrt{2+f_{n-1}(x)} \geq \sqrt{2} > 0$

- La suite de fonctions $\left(\dfrac{1}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $h \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2} \end{cases}$
- La fonction h est continue sur $[0;1]$.
- **Hypothèse de domination**
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ \left|\dfrac{1}{f_n(x)}\right| = \dfrac{1}{f_n(x)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

avec $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ continue, positive et intégrable sur $[0;1]$.

D'après le théorème de convergence dominée, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Remarque

On peut montrer que la suite de fonctions $\left(\dfrac{1}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction h.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0;1]\ f_n(0) \leq f_n(x) \leq 2$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

En effet :

$\forall x \in [0;1]\ f_0(x) = x$

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$\forall x \in [0;1]\ 0 \leq f_n(0) \leq f_n(x) \leq 2$

La fonction g étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$\forall x \in [0;1]\ f_{n+1}(0) = g(f_n(0)) \leq g(f_n(x)) = f_{n+1}(x) \leq g(2) = 2$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 < f_n(0) \leq f_n(x) \leq 2$

On en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{f_n(x)} \leq \dfrac{1}{f_n(0)}$

Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \left\|\dfrac{1}{f_n} - h\right\|_\infty = \dfrac{1}{f_n(0)} - \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 19 *(Mines 2022)*

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\sinh(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2}$$

Correction

On fixe $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+^*\ \frac{\sin(xt)}{\sinh(t)} &= \frac{2\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} = \frac{2\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-2t}} \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ t \mapsto \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-(2n+1)t} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$:
  $\forall t \in \mathbb{R}_+^*\ |f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-(2n+1)t}$
  avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-(2n+1)t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \Im m\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(ix-2n+1)t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \Im m\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(ix-2n+1)t}}{ix-(2n+1)}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \Im m\left(\frac{1}{2n+1-ix}\right)\\ &= \frac{x}{(2n+1)^2+x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} |\sin(xt)|\,\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\,\mathrm{d}t\\ &\leq |x|\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\,\mathrm{d}t \text{ accroissements finis}\\ &= |x|\left(\left[t\frac{-\mathrm{e}^{(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)t}}{2n+1}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{x}{(2n+1)^2}\\ &\leq \frac{|x|}{4n^2}\end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
On peut donc appliquer le théorème $N1$, qui conduit facilement à la formule proposée.

Remarque
Si on ne pense pas aux accroissements finis pour majorer $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$, on peut revenir aux sommes partielles :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{n=0}^{N}\frac{x}{(2n+1)^2+x^2} &= \sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} f_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{N}\left(\mathrm{e}^{-2t}\right)^n\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\frac{1-\mathrm{e}^{-(2N+2)t}}{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-2t}}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$:

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\mapsto \dfrac{\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-(2N+3)t}}{1-\mathrm{e}^{-2t}}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On peut donc séparer les intégrales et écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-(2N+3)t}}{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t$$

Pour conclure, on n'a pas besoin du théorème de convergence dominée :
$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\, \mathrm{e}^{-(2N+3)t}}{1 - \mathrm{e}^{-2t}}\, \mathrm{d}t \right| \leq M \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2N+3)t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2(N+1=3)}$
avec $M = \sup_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\left| \frac{\sin(xt)}{1 - \mathrm{e}^{-2t}} \right| \right) \in \mathbb{R}$ (à justifier)

Exercice 20 *(Mines 2019)*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Vérifier que I_n est bien définie pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} I_n$.
5. Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} I_n$.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \end{cases}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}$ avec $2n > 1$ donc :
   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. On montre sans problème que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ 0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$
   D'où, avec les propriétés des suites géométriques :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$
   ou encore :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$
   Et en intégrant :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ I_{n+1} \leq I_n$
3.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x > 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$.
   - La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
   - **Hypothèse de domination**
     $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ |f_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{1+x^2}$
     avec $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   D'après le théorème de convergence dominée, $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = 0$.

4. • La série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}I_n$ est alternée.
   • $(-1)^{n-1}I_n \underset{n\to}{\longrightarrow} 0$
   • La suite $\left(\left|(-1)^{n-1}I_n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   D'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}I_n$ converge.

5.
$$\begin{aligned}\forall x>0\ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}\\ &= \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

La fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ n'étant pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on intuite que la série de terme général I_n diverge.
Pour le démontrer, on raisonne par l'absurde :
On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} I_n$ converge.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais pas sur $\mathbb{R}_+$) et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{1}{x^2}\end{cases}$ est continue.
- La série $\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge :
  $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = I_n$

D'après le théorème N1, la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
C'est absurde donc la série $\sum_{n\geq 1} I_n$ diverge.

Remarque
Il est possible d'obtenir un équivalent de I_n.

- **Première méthode**

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*\ I_n &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\\ &= 2n\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = 2n(I_n - I_{n+1})\end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall n\in\mathbb{N}^*\ i_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n$
Soit $a>0$ et $J_n = n^a I_n$.

$$\begin{aligned}\ln(J_{n+1}) - \ln(J_n) &= a\ln(n+1) + \ln(I_{n+1}) - a\ln(n) - \ln(J_n)\\ &= a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right) = a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\\ &= \left(a-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

En prenant $a = \dfrac{1}{2}$, la série de terme général $\ln(J_{n+1}) - \ln(J_n)$ converge donc la suite $(\ln(J_n))$ converge.
On en déduit que la suite $(\sqrt{n} I_n)$ converge vers un nombre K strictement positif.
On en déduit $I_n \sim \dfrac{K}{n}$.

- **Deuxième méthode**
  Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{(1+x^2)^n} = \exp\left(-n\ln\left(1+x^2\right)\right) \simeq \mathrm{e}^{-nx^2}$
  $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ se calcule avec le changement de variable $t = x\sqrt{n}$.
  On fait le même changement de variable dans I_n :
  $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$
  Avec le théorème de convergence dominée :
  $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
  On obtient la domination en écrivant avec la formule du binôme :
  $\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{n} \geq 1 + t^2$
-

Exercice 21 *(Mines 2019)*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

Montrer que I converge et l'écrire sous la forme d'une série convergente.

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1} \end{cases}$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0.
$x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

$$\begin{aligned}\forall x > 0\ f(x) &= \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-x})^n \text{ car } \mathrm{e}^{-x} \in]0;1[\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-nx}\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x)\,\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$:
  $f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc f_n est prolongeable par continuité en 0.
  $x^2 f_n(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$
- $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, \mathrm{d}x$ converge :
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} |\sin(x)|\, \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x$
  Mais :
  $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |\sin(x)| = |\sin(x) - \sin(0)| \leq |x - 0| \displaystyle\sup_{t\in[0;x]} |\cos(t)| \leq |x|$ par les accroissements finis.
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, \mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x$
  On procède à une intégration par parties :
  $u(x) = x$, $u'(x) = 1$
  $v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$, $v(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$
  $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$: l'intégration par parties est justifiée.
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\left[-\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$
  On en déduit :
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n^2}$
  et la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, \mathrm{d}x$ converge.

On peut donc appliquer le théorème $N1$ et :
$I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*\ \int_0^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x &= \Im m\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-n)x}\, \mathrm{d}x\right) = \Im m\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(i-n)x}}{i-n}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \Im m\left(\frac{1}{n-i}\right) = \Im m\left(\frac{n+i}{n^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{n^2+1}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 22 *(Mines 99)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Etudier la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1 - t^\alpha)^n\, \mathrm{d}t$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (1-t^\alpha)^n \end{cases}$ est continue sur $[0;1]$.

Il n'y a pas de problème de définition de u_n.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $]0;1]$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0;1]$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \begin{cases}]0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{-\alpha} \end{cases}$ est continue.
- $\sum_{n\geq 0} \int_{]0;1]} |f_n| = \sum_{n\geq 0} u_n$ converge-t-elle ?
  C'est justement la question posée.
- **Premier cas** $\alpha < 1$
  $\forall p \in \mathbb{N} \ \sum_{n=0}^{p} \int_{]0;1]} f_n = \int_{]0;1]} \sum_{n=0}^{p} f_n$: pas de problème
  Mais :
  $\forall p \in \mathbb{N} \ \sum_{n=0}^{p} f_n \leq S$ car : $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \geq 0$
  et S est intégrable sur $]0;1]$ (car on a supposé $\alpha < 1$) donc :
  $\forall p \in \mathbb{N} \ \sum_{n=0}^{p} \int_{]0;1]} f_n \leq \int_{]0;1]} S \in \mathbb{R}$
  Donc la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} \int_{]0;1]} f_n = \sum_{n\geq 0} \int_{]0;1]} |f_n|$ est majorée.
  Donc $\sum u_n$ converge et :
  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_{]0;1]} S = \int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{1-\alpha}$
- **Deuxième cas :** $\alpha \geq 1$
  Cette fois S n'est pas intégrable sur $]0;1]$.
  Si $\sum_{n\geq 0} \int_{]0;1]} |f_n|$ convergeait, S serait intégrable sur $]0;1]$.
  Ce n'est pas le cas donc $\sum_{n\geq 0} \int_{]0;1]} |f_n| = \sum_{n\geq 0} \int_{]0;1]} f_n$ diverge et $\sum u_n$ divverge.

Exercice 23 *(Centrale 2017)*

$g(x) = \arcsin(1-x^2)$

1. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.
2. Donner un équivalent de $\arcsin(t) - \dfrac{\pi}{2}$ en 1.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3\sqrt{n}}}{\pi/2 - \arcsin t}\,\mathrm{d}t$
   Quelle est la limite de u_n ?
   Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Correction

1. La fonction arcsin est continue sur $[-1;1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$.
   $\forall x \in [0;1]\ 1-x^2 \in [0;1]$
   $\forall x \in]0;1]\ 1-x^2 \in [0;1[$

On en déduit que g est continue sur $[0;1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$.
De plus :
$\forall x \in]0;1]\ g'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} -\sqrt{2}$
D'après le théorème de la limite de la dérivée, g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et $g'(0) = -\sqrt{2}$.

2. D'après ce qui précède, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \dfrac{\arcsin(1-x^2)-\pi/2}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} -\sqrt{2}$
Pour $t \in [0;1[$, on pose $x = \sqrt{1-t} \underset{\substack{t\to 1\\ t<1}}{\longrightarrow} 0$
$\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \dfrac{\arcsin(t)-\pi/2}{\sqrt{1-t}} \underset{\substack{t\to 1\\ t<1}}{\longrightarrow} -\sqrt{2}$
Donc :
$$\arcsin(t) - \frac{\pi}{2} \sim_1 -\sqrt{2(1-t)}$$

3. • **Existence et limite de u_n**
Soit $\varphi \begin{cases} [0;1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{\pi/2 - \arcsin(t)} \end{cases}$.
D'après ce qui précède, φ est continue et intégrable sur $[0;1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{t^{3\sqrt{n}}}{\pi/2 - \arcsin t} \end{cases}$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;1[$.
— La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;1[$.
— La fonction nulle est continue.
— **Hypothèse de domination**
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ \ |f_n(x)| = \dfrac{t^{3\sqrt{n}}}{\pi/2 - \arcsin t} \leq \varphi(t)$
avec φ continue, positive et intégrable sur $[0;1[$.
D'après le théorème de convergence dominée : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

• **Nature de la série de terme général u_n**
Une solution rapide est possible :
$\forall n \geq 1\ \sqrt{n} \leq n$
Donc :
$\forall n \geq 1\ \forall t \in]0;1[\ 3\sqrt{n}\ln(t) \geq 3n\ln(t)$
et :
$\forall n \geq 1\ \forall t \in]0;1[\ t^{3\sqrt{n}} \geq t^{3n} \geq 0$
Par ailleurs :
$\forall t \in]0;1[\ 0 < \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$
On en déduit :
$\forall t \in]0;1[\ \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} - \arcsin(t)} \geq \dfrac{2}{\pi}$
Donc :
$$\forall n \geq 1\ u_n \geq \frac{2}{\pi}\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi(3n+1)} \geq 0$$
et la série de terme général u_n diverge.
Si on veut éviter l'astuce précédente, on peut procéder ainsi :

On commence par intuiter le résultat : la fonction $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{3\sqrt{n}}}{\pi/2 - \arcsin t}$ est-elle intégrable sur $[0;1[$?
La première méthode à laquelle on pense consiste à chercher un équivalent en 1 de cette fonction.
Pour cela on a recours à une comparaison série-intégrale.
On fixe $t \in]0;1[$.
La fonction $x \mapsto t^{3\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{3\sqrt{x}\ln t}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$: $\ln t < 0$.
$\forall t \in]0;1[\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{3\sqrt{x}\ln t}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{+\infty} t^{3\sqrt{n}} \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{3\sqrt{x}\ln t}\,\mathrm{d}x$
On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $z = 9x(\ln t)^2$
$\forall t \in]0;1[\frac{1}{9(\ln t)^2} \int_{9(\ln t)^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{z}}\mathrm{dz} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} t^{3\sqrt{n}} \leq \frac{1}{9(\ln t)^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{z}}\mathrm{dz}$
Les intégrales se calculent mais cela ne sert à rien.
On a $\sum_{n=1}^{+\infty} t^{3\sqrt{n}} \sim_1 \frac{c}{9(1-t)^2}$ avec $c > 0$.
Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{3\sqrt{n}}}{\pi/2 - \arcsin t} \sim_1 \frac{d}{(1-t)^{5/2}}$ avec $d > 0$.
La fonction $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{3\sqrt{n}}}{\pi/2 - \arcsin t}$ n'est donc pas intégrable sur $[0;1[$.
Si on demande de montrer qu'elle n'est pas intégrable, on peut aller plus vite :
$\forall t \in]0;1[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{3\sqrt{n}}}{\pi/2 - \arcsin t} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{3n}}{\pi/2 - \arcsin t} = \frac{t^3}{(1-t^3)(\pi/2 - \arcsin t)} \sim_1 \frac{e}{(1-t)^{3/2}}$
avec $e > 0$.
On conclut facilement.

On montre ensuite que la série de terme général u_n diverge.
On raisonne par l'absurde.
On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $[0;1[$.
— La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0;1[$:
  Soit $t \in [0;1[$ fixé.
  Si $t > 0$, $n^2 f_n(t) = \exp(2\ln(n) + 3\ln(t)\sqrt{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{]} 0$ ($\ln(n) = o(\sqrt{n})$ et $\ln(t) < 0$).
  Donc la série de terme général $f_n(t)$ converge.
  Si $t = 0$ alors $f_n(t) = 0$ est le terme général d'une série convergente.
— La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0;1[$.
  Dans le programme actuel, on indique qu'on peut se passer de cette vérification.
  Elle peut se faire en remarquant qu'il y a convergence normale sur tout segment $[0;a]$ avec $a > 0$:
  $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(a)$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

— La série $\sum_{n\geq 0} \int_0^1 |f_n(t)| \, \mathrm{d}t$ converge.
En effet :
$\forall n \in \mathbb{N} \int_0^1 |f_n(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 f_n(t) \, \mathrm{d}t = u_n$

D'après le théorème N1, la fonction $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} t^{3\sqrt{n}}$ est intégrable sur $[0;1[$.

C'est absurde donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

5 Dérivation

Exercice 24 *(Mines 2018)*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$, $u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$.

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.
2. Calcul de $S'(1)$.

Correction

1.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$: clair.
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ u_n'(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}$
   - La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0;1]$:
   $u_n(x) \sim -\frac{x^2}{2n^2}$
   - La série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[0;1]$:
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ |u_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

   Donc S est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et :
   $\forall x \in [0;1] \ S'(x) = -x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$
2. $S'(1) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = -1$

Exercice 25 *(Mines 2016, 2021)*

$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x + n}$

1. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Equivalent de S en 0 ?
4. Equivalent de S en $+\infty$?

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n^2x+n} \end{cases}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
     soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment contenu dans $\mathbb{R}_+^*$.
     $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \ |f_n(x)| = \dfrac{1}{n^2x+n} \leq \dfrac{1}{n^2a}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

   On en déduit que que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
     $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f_n'(x) = -\dfrac{n^2}{(n^2x+n)^2} = -\dfrac{1}{(nx+1)^2}$
   - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - La série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
     soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment contenu dans $\mathbb{R}_+^*$.
     $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \ |f_n'(x)| = \dfrac{1}{(nx+1)^2} \leq \dfrac{1}{(na)^2} = \dfrac{1}{n^2a^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

   On en déduit que que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   Soit $\varphi \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^2x+t} \end{cases}$.
   φ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1;+\infty[$.
   $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \leq \frac{1}{x+1} + \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

   $$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2x+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(tx+1)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{tx+1}\right)\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{t}{tx+1}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= -\ln x + \ln(x+1) \end{aligned}$$

   On en déduit : $S(x) \sim_0 -\ln x$.
4. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   $S(x) - \dfrac{\pi^2}{6x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x+n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2x(n^2x+1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nx(n^2x+1)}$
   On en déduit :
   $\left|S(x) - \dfrac{\pi^2}{6x}\right| \leq \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$
   Donc $S(x) - \dfrac{\pi^2}{6x} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et finalement :
   $S(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi^2}{6x}$

Exercice 26 *(CCP)*

Domaine de définition, continuité et dérivabilité de la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\arctan(nx)}{n^2} \end{cases}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R} \ |f_n(x)| \leq \dfrac{\pi}{2n^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Or les f_n sont toues continues donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Passons à la dérivabilité : :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R} \ f_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$
- $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
  Soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un tel segment.
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [a;b] \ |f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n^3x^2} \leq \dfrac{1}{n^3a^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
  Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a;b]$

On en déduit que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0 \ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Par parité, on a le même résultat sur $\mathbb{R}_-^*$.

On fixe $x > 0$.

Soit $g \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t^2x^2)} \end{cases}$.

g est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1;+\infty[$ (démontrable directement ou avec la convergence de la série de terme général $g(n)$).

Donc :

$$\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \leq f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g(n) \leq g(1) + \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^{+\infty} \frac{1+t^2x^2-t^2x^2}{t(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{tx^2}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2x^2\right)\right]_1^{+\infty} = \left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2x^2}}\right)\right]_1^{+\infty} \\
&= \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x > 0 \;\; -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \leq f'(x) \leq -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2}$$

On en déduit $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
On en déduit que f n'est pas dérivable en 0 (théorème de la limite de la dérivée + hypothèses).

Exercice 27 *(Centrale 2019)*

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nx\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$$

Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$, la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ et sur $[a;+\infty[$ avec $a > 0$ et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction

Pour tout $n > 1$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{nx\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \end{cases}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.
Si $x = 0$, il est clair que la série de terme général $f_n(x) = f_n(0) = 0$ converge.
Si $x > 0$, $n^2 f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série de terme général $f_n(x)$ converge.
$\forall n > 1\ \forall x \geq 0\ f_n'(x) = \dfrac{-n(nx-1)\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$
On dresse le tableau de variations et on obtient :
$\forall n > 1\ \ \|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\ln(n)}$
$\dfrac{n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc APCR $\dfrac{1}{\ln(n)} \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$
On en déduit que la série de terme général $\dfrac{1}{\ln(n)}$ diverge.
On en déduit qu'il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $a > 0$.
$\exists n_0 > 1$ tq $\forall n \geq n_0\ \dfrac{1}{n} \leq a$
$\forall n \geq n_0\ \sup\limits_{x\in[a;+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$
D'après l'étude de la convergence simple, la série de terme général $f_n(a)$ converge donc il y a convergence normale sur $[a;+\infty[$.

$$\begin{aligned}\forall n > 1\ R_n\left(\frac{1}{n}\right) &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}\exp\left(-\frac{k}{n}\right)}{\ln(k)}\end{aligned}$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\,\mathrm{e}^{-x}) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$ donc $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$.
Si k est compris entre $n+1$ et $2n$ alors $\dfrac{k}{n}$ est compris entre 1 et 2 donc :

$\forall n > 1 \; R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2\,\mathrm{e}^{-2}}{\ln(2n)} = \frac{2n\,\mathrm{e}^{-2}}{\ln(2n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

La suite de fonctions (R_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$ donc la série de fonction $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Cela n'empêche pas f d'être continue sur $\mathbb{R}_+$ mais ici :

$f\left(\frac{1}{n}\right) \geq R_n\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$.

Elle n'est donc pas non plus $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $n > 1$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
  $\forall n > 1 \; \forall x > 0 \; f_n'(x) = \frac{-n(nx-1)\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$
- La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La série de fonctions de terme général f_n' converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
  Soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.
  $\forall n > 1 \; \forall x \in [a;b] \;\; |f_n'(x)| \leq \frac{n(nb+1)}{\ln(n)}\,\mathrm{e}^{-na}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente : $n^2\frac{n(nb+1)}{\ln(n)}\,\mathrm{e}^{-na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 28 *(Mines 2022)*

$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$

1. Domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f n'est pas dérivable en 0

Correction

1. Pour tout $n > 1$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \end{cases}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   Si $x = 0$, il est clair que la série de terme général $f_n(x) = f_n(0) = 0$ converge.
   Si $x > 0$, $n^2 f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série de terme général $f_n(x)$ converge.
   Si $x < 0$ alors $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série de terme général $f_n(x)$ diverge grossièrement.
2. - Pour tout $n > 1$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
     $\forall n > 1 \; \forall x > 0 \; f_n'(x) = \frac{-(nx-1)\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$
   - La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - La série de fonctions de terme général f_n' converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
     Soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall n > 1 \; \forall x \in [a;b] \;\; |f_n'(x)| \leq \dfrac{nb+1}{\ln(n)} \, \mathrm{e}^{-na}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente : $n^2 \dfrac{nb+1}{\ln(n)} \, \mathrm{e}^{-na} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;\; \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$

Soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 \leq x_2$.

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \dfrac{\mathrm{e}^{-nx_1}}{\ln(n)} \geq \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n_2)}$

Donc en sommant : $\dfrac{f(x_1)}{x_1} \geq \dfrac{f(x_2)}{x_2}$

La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante donc $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

De plus :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;\; \dfrac{f(x)}{x} \leq l$

Par ailleurs soit N un entier supérieur ou égal à 3.

$\forall x > 0 \;\; \dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$ car tous les termes de la somme sont positifs.

Donc :

$\forall x > 0 \;\; \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \leq l$

En faisant tendre x vers 0, on obtient :

$\forall N \geq 3 \;\; \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln(n)} \leq l$

Mais :

$\forall n \geq 3 \;\; \ln(n) \leq n - 1 < n$

Donc :

$\forall n \geq 3 \;\; \dfrac{1}{\ln(n)} \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$

Donc la série de terme général $\dfrac{1}{\ln(n)}$ diverge. Comme c'est une série à termes positifs :

$\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$

On en déduit $l = +\infty$ et f n'est pas dérivable en 0.