Sujets classiques
Endomorphismes et matrices nilpotents

941

1 Définitions

1.1 Cas des endomorphismes

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est nilpotent si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$.
$\left\{l \in \mathbb{N}^* \text{ tq } u^l = 0\right\}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède donc un plus petit élément qu'on appelle l'indice de nilpotence de u. Il est caractérisé par $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.
Par exemple $D_n \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ est nilpotente d'indice $n+1$.

1.2 Cas des matrices carrées

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est nilpotent si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.
$\left\{l \in \mathbb{N}^* \text{ tq } A^l = 0\right\}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède donc un plus petit élément qu'on appelle l'indice de nilpotence de u. Il est caractérisé par $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$

Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice n.

En effet à chaque fois qu'on multiplie par A la diagonale de 1 remonte d'un cran.
Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique et u l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a :
$u(e_1) = 0$ et pour j compris entre 2 et n, $u(e_j) = e_{j-1}$.
On en déduit si k est compris entre 1 et $n-1$:
$u^k(e_1) = \cdots = u^k(e_k) = 0$ et pour j compris entre $k+1$ et n : $u^k(e_j)) = e_{j-k}$
Il en résulte que tous les coefficients de A^k sont nuls sauf ceux d'indices $(1, k+1)$, $(2, k+2), \dots, (n-k, n)$ qui valent 1.
On peut observer que ce sont les coefficients d'indice (i,j) tels que $j - i = k$.
Il reste à appliquer une dernière fois u pour montrer que $u^n = 0$ donc $A^n = 0$.

2 Indice de nilpotence et dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p.
Soit x un vecteur non nul de E.
$\left\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } u^k(x) = 0\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle contient p.
Par conséquent, elle a un plus petit élément qu'on note p_x.
Il existe au moins un vecteur x_0 de E tel que $p_{x_0} = p$ (sinon $u^{p-1} = 0$) mais ce n'est pas le cas de tous les x. Par exemple $p_{u(x_0)} = p - 1$.
La famille $(x, u(x), \ldots, u_{p_x-1}(x))$ est libre.

On considère une combinaison linéaire nulle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p_x-1} a_k u^k(x) = 0$
On applique u^{p_x-1}, il reste $a_0 u^{p_x-1}(x) = 0$ avec $u^{p_x-1}(x) \neq 0$ donc $a_0 = 0$.
Il reste $\displaystyle\sum_{k=1}^{p_x-1} a_k u^k(x) = 0$
On applique u^{p_x-2}, on obtient $a_1 = 0$ et on recommence.
Une rédaction plus rigoureuse est possible.
On suppose que $(a_0, \ldots, a_{p_x-1}) \neq (0, \ldots, 0)$.
Soit $r = \min\left(\{l \in [\![0; p_x - 1]\!] \text{ tq } a_l \neq 0\}\right)$ (qui est bien défini)
$\displaystyle\sum_{k=r}^{p_x-1} a_k u^k(x) = 0$
On applique u^{p_x-1-r} qui est bien défini car $r \leq p_x - 1$.
Il reste $a_r u^{p_x-1}(x)$ avec a_r nombre non nul et $u^{p_x-1}(x)$ vecteur non nul.
C'est absurde donc $(a_0, \ldots, a_{p_x-1}) = (0, \ldots, 0)$

On a donc :
$\forall x \in E \setminus \{0\}\ p_x \leq n$ (le cardinal d'une famille libre est inférieur à la dimension)
On en déduit :
$\forall x \in E\ u^n(x) = 0$
Donc $u^n = 0$: l'indice de nilpotence est toujours inférieur ou égal à la dimension.

Si u est nilpotent d'indice $n = \dim(E)$ alors il existe x dans E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$.
D'après ce qui précède, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre. Au vu de son cardinal, c'est une base de E.
$(u^{n-1}(x), \ldots, u(x), x)$ est également une base de E et la matrice de u dans cette base est A la matrice du paragraphe précédent.

On en déduit que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice n alors M est semblable à A.
On en déduit que si $M1$ et $M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont nilpotentes d'indice n alors elles sont semblables.

3 Nilpotence et réduction

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A nilpotente $\Longleftrightarrow \chi_A = X^n$
Si A est nilpotente alors A possède un polynôme annulateur de la forme X^p avec $p \in \mathbb{N}^*$.
On en déduit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$
Mais, d'après d'Alembert-Gauss, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$.

Toujours d'après d'Alembert-Gauss, χ_A étant unitaire de degré n avec 0 comme seule racine, $\chi_A = X^n$.

Dans le programme actuel, la réciproque est triviale par invocation du théorème de Cayley-Hamilton.

4 Endomorphismes nilpotents et racines carrées

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n.
Il n'existe pas d'endomorphisme v de E tel que $v^2 = u$.
En effet $v^{2n} = u^n = 0$ donc v est nilpotent et $v^n = 0$.
On en déduit $u^{n-1} = v^{2n-2}$ avec $2n - 2 \geq n$ car $n \geq 2$.
Donc $u^{n-1} = 0$: absurde.

5 Ensemble des nilpotents

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathcal{N}$ est stable par produit externe mais pas par addition.
Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la somme de deux matrices nilpotentes sans être elle-même nilpotente.
$\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ est le noyau de la trace.
La trace d'une matrice nilpotente est la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités soit $n \times 0 = 0$ donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ est inclus dans le noyau de la trace.
Réciproquement, les matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$, qui sont elles-mêmes nilpotentes, et les matrices $E_{1,1} - E_{j,j}$, $2 \leq j \leq n$, forment une base de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{tr}\,)$.
$E_{1,1} - E_{j,j} = \dfrac{1}{2}\left((E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}) + (E_{1,1} - E_{1,j} + E_{j,1} - E_{j,j})\right)$ est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes.