

TD 2024-2025

Analyse 2

Chapitre 3

Continuité

941

1 Fonctions lipschitziennes

Exercice 1 (*X 2013*)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et Y une partie non vide de E .

Si $x \in E$, on pose $f(x) = \inf\{\|x - y\|, y \in Y\}$.

Montrer que f est 1-lipschitzienne.

Question subsidiaire posée à la lumière du programme actuel

Quel lien peut-on faire entre f et l'adhérence de Y ?

Exercice 2 (*Centrale 2019*)

On considère une suite de fonctions définies sur $[-1; 1]$ par :

$$\forall x \in [-1; 1] \quad f_0(x) = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-1; 1] \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) \, dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[-1; 1]$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[-1; 1]$ et que sa somme f est une fonction lipschitzienne vérifiant :

$$\forall x \in [-1; 1] \quad f(x) = \int_0^x (f(t) + f(t^2)) \, dt$$

2 Parties fermées

Exercice 3

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et F l'ensemble des polynômes de E qui sont scindés sur $\mathbb{R}$ ou constants.

Montrer que F est un fermé de E .

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Montrer que F est une partie fermée de E .

Exercice 5 (*Centrale 2002, PC*)

Soit $r > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{r^2}{n^2} \right\}$.

Donner une CNS portant sur r pour que $A = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ soit un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 (X 2012)

Soit $f : [a; b]^3 \rightarrow [a; b]^3$ (où $[a; b]$ est un segment de $\mathbb{R}$).

On suppose :

$$\forall (x, y) \in [a; b]^3 \times [a; b]^3 \quad x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f admet au plus un point fixe.
2. Montrer que f admet exactement un point fixe.

3 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$
 f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto e^{x-y}$ si $x > y$.
 $(x, y) \mapsto 1$ sinon
 f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)$ si $x^2 + y^2 < 1$.
 $(x, y) \mapsto 0$ si $x^2 + y^2 \geq 1$
 f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?