TD 2024-2025
Analyse 2
Chapitre 3
Continuité

941

1 Fonctions lipschitziennes

Exercice 1 *(X 2013)*

Soient $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé et Y une partie non vide de E.
Si $x \in E$, on pose $f(x) = \inf\{\|x-y\|\,,\, y \in Y\}$.
Montrer que f est 1-lipschitzienne.
Question subsidiaire posée à la lumière du programme actuel
Quel lien peut-on faire entre f et l'adhérence de Y ?

Correction

- **Première méthode**
  f est bien définie : toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.
  Soit x_1 et $x_2 \in E$.
  $\forall y \in Y\ \ \|x_1 - y\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\|$
  On prend la borne inférieure :
  $f(x_1) \leq \|x_1 - x_2\| + f(x_2)$
  D'où : $f(x_1) - f(x_2) \leq \|x_1 - x_2\|$
  De même :
  $f(x_2) - f(x_1) \leq \|x_2 - x_1\| = \|x_1 - x_2\|$
  On en déduit :
  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|x_1 - x_2\|$
  Deuxième méthode
  f est bien définie : toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.
  Par contre, cette borne inférieure n'est pas forcément atteinte.
  Supposons Y fermée et bornée : c'est une condition suffisante pour que la borne inférieure soit atteinte :
  Soit $x \in E$.
  La fonction $\begin{cases} Y \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \|x-y\| \end{cases}$ est continue et Y est une partie fermée et bornée de $\mathcal{E}$ donc :
  $\exists z(x) \in Y$ tq $\forall y \in Y\ \ \|x-y\| \geq \|x - z(x)\|$
  On a en particulier :
  $\forall (x_1, x_2) \in E^2\ \ \|x_1 - z(x_1)\| \leq \|x_1 - z(x_2)\|$ et $\|x_2 - z(x_2)\| \leq \|x_2 - z(x_1)\|$
  Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.
  Quitte à échanger x_1 et x_2, on peut supposer $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$0 \leq f(x_2) - f(x_1) = \|x_2 - z(x_2)\| - \|x_1 - z(x_1)\| \leq \|x_2 - z(x_1)\| - \|x_1 - z(x_1)\|$
La fonction $||$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :
$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq |\|x_2 - z(x_1)\| - \|x_1 - z(x_1)\|| \leq \|x_2 - z(x_1) - (x_1 - z(x_1))\| = \|x_2 - x_1\|$.
Passons au cas général :
Soient x_1 et $x_2 \in E$.
On cherche à montrer que $|f(x_2) - f(x_1)| \leq \|x_2 - x_1\|$.
C'est trivial si $f(x_1) = f(x_2)$.
On suppose $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Quitte à échanger x_1 et x_2, on peut supposer $f(x_1) < f(x_2)$.
Il existe deux suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Y telles que :
$\|x_1 - z_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_1)$ et $\|x_2 - w_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_2)$
$0 \leq f(x_2) - f(x_1) \leq \|x_2 - z_n\| - \|x_1 - z_n\| + \|x_1 - z_n\| - f(x_1)$
La fonction $||$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\begin{aligned}
|f(x_2) - f(x_1)| &\leq |\|x_2 - z_n\| - \|x_1 - z_n\| + \|x_1 - z_n\| - f(x_1)| \\
&\leq |\|x_2 - z_n\| - \|x_1 - z_n\|| + |\|x_1 - z_n\| - f(x_1)| \\
&\leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - z_n\| - f(x_1)
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :
$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \|x_2 - x_1\|$

On va montrer : $\overline{Y} = \{x \in E \text{ tq } f(x) = 0\}$.
Soit x un point adhérent à Y.
Il existe une suite $(y_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq f(x) \leq \|x - y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
D'où $f(x) = 0$.
Réciproquement, on suppose $f(x) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$f(x) < \dfrac{1}{n}$ donc il existe $y_n \in Y$ tel que $\|x - y_n\| \leq \dfrac{1}{n}$.
(y_n) est une suite d'éléments de Y qui converge vers x.
x est point adhérent à Y.

Exercice 2 *(Centrale 2019)*

On considère une suite de fonctions définies sur $[-1;1]$ par :
$\forall x \in [-1;1]\ f_0(x) = 1$
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1;1]\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \Big(f_n(t) + f_n(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[-1;1]$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[-1;1]$ et que sa somme f est une fonction lipschitzienne vérifiant :
   $\forall x \in [-1;1]\ f(x) = \displaystyle\int_0^x \Big(f(t) + f(t^2)\Big)\,\mathrm{d}t$

Correction
On cherche à montrer :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1;1]\ \ |f_n(x)| \leq a_n\,|x|^n$
La propriété est vraie au rang 0 avec $a_0 = 1$.

On suppose la propriété vraie au rang n.

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in [0;1]\ |f_{n+1}(x)| & \leq & \displaystyle\int_0^x \left(|f_n(t)| + \left|f_n(t^2)\right|\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \left(a_n t^n + a_n t^{2n}\right)\,\mathrm{d}t \\
& \leq & a_n \left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) \leq a_n x^{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{x^n}{2n+1}\right) \\
& \leq & \dfrac{2}{n+1} a_n\,|x|^{n+1} \\
\forall x \in [-1;0]\ |f_{n+1}(x)| & \leq & \displaystyle\int_x^0 \left(|f_n(t)| + \left|f_n(t^2)\right|\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^0 \left(a_n(-1)^n t^n + a_n t^{2n}\right)\,\mathrm{d}t \\
& \leq & a_n \left(\dfrac{(-1)^n \times (-1) \times x^{n+1}}{n+1} - \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) \leq a_n\,|x|^{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{|x|^n}{2n+1}\right) \\
& \leq & \dfrac{2}{n+1} a_n\,|x|^{n+1}
\end{array}$$

Donc la propriété est vraie avec :
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = \dfrac{2}{n+1} a_n$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1;1]\ \ |f_n(x)| \leq \dfrac{2^n}{n!}\,|x|^n \leq \dfrac{2^n}{n!}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-1;1]$.
On a alors, si on note S sa somme :

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in [-1;1]\ S(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) \\
& = & \displaystyle 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \left(f_n(t) + f_n(t^2)\right)\,\mathrm{d}t
\end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f_n(t) + f_n(t^2) \end{cases}$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [-1;1]\ \ |g_n(t)| \leq |f_n(t)| + \left|f_n(t^2)\right| \leq \dfrac{2^{n+1}}{n!}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
Donc la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $[-1;1]$.
De plus, les fonctions g_n étant continues :

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in [-1;1]\ S(x) & = & \displaystyle 1 + \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(f_n(t) + f_n(t^2)\right)\,\mathrm{d}t \\
& = & \displaystyle 1 + \int_0^x \left(S(t) + S(t^2)\right)\,\mathrm{d}t
\end{array}$$

On en déduit que S est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :
$\forall x \in [-1;1]\ S'(x) = S(x) + S(x^2)$
Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment y est lipschitzienne.

2 Parties fermées

Exercice 3

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et F l'ensemble des polynômes de E qui sont scindés sur $\mathbb{R}$ ou constants.
Montrer que F est un fermé de E.

Correction
E est un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie.
F est formé des polynômes de degré ≤ 1 et des polynômes de degré 2 $aX^2 + bX + c$ tels que $b^2 - 4ac \geq 0$.
Donc $F = \left\{aX^2 + bX + c \text{ tq } b^2 - 4ac \geq 0\right\}$ (si $a = 0$ $b^2 - 4ac \geq 0$).
L'application $f \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ P = aX^2 + bX + c \mapsto b^2 - 4ac \end{cases}$ est continue car polynomiale.
De plus $\mathbb{R}_+$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc $F = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est un fermé.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que F est une partie fermée de E.

Correction
Soient p la dimension de F, n celle de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à F (les cas $p = 0$ ou $p = n$ sont clairs).
Soit $x \in E$ un point adhérent à F.
Il existe $(x_N)_{N\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $x_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} x$.
$x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$
$x_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_{N,i} e_i$
$\forall i \in [\![1; n]\!]$ $y_i = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} y_{N,i}$
Mais :
$\forall N \in \mathbb{N}$ $\forall i \in [\![p+1; n]\!]$ $y_{N,i} = 0$ car $x_N \in F$.
Donc :
$\forall i \in [\![p+1; n]\!]$ $y_i = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} y_{N,i} = \lim_{N\to+\infty} 0 = 0$
Donc $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i e_i \in F$.
Donc $\overline{F} \subset F$ et F est fermé.

Exercice 5 *(Centrale 2002, PC)*

Soit $r > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \left(x - \dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{n}\right)^2 \leq \dfrac{r^2}{n^2}\right\}$.
Donner une CNS portant sur r pour que $A = \displaystyle\bigcup_{n\geq 1} B_n$ soit un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Correction
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n est la boule euclidienne fermée de rayon $\dfrac{r}{n}$ et de centre $\Omega_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$.
Supposons A fermé.

$\forall n \in \mathbb{N}\ \Omega_n \in B_n \subset A$
$\Omega_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ donc $(0,0) \in A$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(0,0) \in B_{n_0}$ ie $\dfrac{2}{n_0^2} \leq \dfrac{r_0^2}{n^2}$.
On en déduit $r_0 \geq \sqrt{2}$.

Réciproquement, on suppose $r_0 \geq \sqrt{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in B_n$.
$\Omega_1 M \leq \Omega_1\Omega_n + \Omega_n M$
$\overrightarrow{\Omega_1\Omega_n} = \left(\dfrac{1}{n} - 1\right)\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ donc $\Omega_1\Omega_n = \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$
$\Omega_1 M \leq \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{r}{n} \leq r\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{r}{n} = r$
Donc $M \in B_1$.
Donc $B_n \subset B_1$.
Donc $A = B_1$ est fermé.
Finalement :

$$A \text{ fermé } \iff r \geq \sqrt{2}$$

Exercice 6 *(X 2012)*

Soit $f : [a;b]^3 \to [a;b]^3$ (où $[a;b]$ est un segment de $\mathbb{R}$).
On suppose :
$\forall (x,y) \in [a;b]^3 \times [a;b]^3\ x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$

1. Montrer que f admet au plus un point fixe.
2. Montrer que f admet exactement un point fixe.

Correction

1. Soient l et $l' \in [a;b]^3$ tq $f(l) = l$ et $f(l') = l'$.
   Si $l \neq l'$ alors $\|l - l'\| < \|l - l'\|$.
   C'est absurde donc $l = l'$.
2. f est continue donc $x \mapsto \|f(x) - x\|$ aussi.
   $[a;b]^3$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^3$ donc :
   $\exists x_0 \in [a;b]^3$ tq $\forall x \in [a;b]^3\ \ \|f(x_0) - x_0\| \leq \|f(x) - x\|$
   Supposons $f(x_0) \neq x_0$.
   x_0 et $f(x_0) \in [a;b]^3$ donc :
   $\|f(f(x_0)) - f(x_0)\| < \|f(x_0) - x_0\| \leq \|f(f(x_0)) - f(x_0)\|$
   C'est absurde.

3 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Exercice 7

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2+1} \end{cases}$
f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Correction

La réponse est triviale. Le but de cet exercice est de faire utiliser les théorèmes généraux.

La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{cases}$ est continue car polynomiale.

La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2+y^2+1 \end{cases}$ est continue car polynomiale. De plus elle ne s'annule jamais.

Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{x-y} \text{ si } x > y \\ (x,y) \mapsto 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Correction

La réponse est oui.

- **Première méthode**
  On note $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > y\}$ et $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \leq y\}$ son complémentaire.
  La fonction $\begin{cases} D_1 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x-y \end{cases}$ est continue car polynomiale.
  La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$, par composition la fonction $\begin{cases} D_1 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{x-y} \end{cases}$ est continue.
  La fonction $\begin{cases} D_2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 1 \end{cases}$ est continue car constante.
  Reste à examiner le raccord :
  Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
  $\mathrm{e}^{x-y} \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,x_0) \\ (x,y)\in D_1}]{} \mathrm{e}^0 = 1 = f(x_0,x_0)$
  Donc f est continue en (x_0,x_0).
  Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- **Deuxième méthode**
  On introduit la fonction $\varphi \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^t \text{ si } t > 0 \\ t \mapsto 1 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$.
  On a alors :
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ f(x,y) = \varphi(x-y)$
  Il suffit alors de montrer que la fonction **d'une seule variable** φ est continue sur $\mathbb{R}$.
  Or elle est clairement continue sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi(t) = \mathrm{e}^t \xrightarrow[\substack{t\to 0 \\ t>0}]{} 1 = \varphi(0)$ donc φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x^2+y^2-1}\right) \text{ si } x^2+y^2<1 \\ (x,y) \mapsto 0 \text{ si } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$.

f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Correction

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 0 \text{ si } t \geq 0 \\ t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \text{ si } t<0 \end{cases}$.

$\dfrac{1}{t} \xrightarrow[\substack{t \to 0 \\ t<0}]{} -\infty$ donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \xrightarrow[\substack{t \to 0 \\ t<0}]{} 0$.

Donc φ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2+y^2-1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Or :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ f(x,y) = \varphi(x^2+y^2-1)$

donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition.