ANALYSE 2
PC*1
2024 - 2025
Chapitre 3 :
Continuité

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Fonctions continues sur une partie d'un espace vectoriel normé

1.1 Définition

Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E. On dit qu'une application $f : A \to F$ est continue si et seulement si elle est continue en tout point de A.
On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des applications continues de A dans F.
$\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est noté simplement $\mathcal{C}(A)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

1.2 Propriétés

1.2.1 Combinaisons linéaires

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-ev normé.
Soit A une partie non vide de E.
Soient f_1 et $f_2 : A \to F$ continues.
Alors pour tous λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est continue.
En d'autres termes $\mathcal{C}(A, F)$ est un sev de $\mathcal{F}(A, F)$.
($\mathcal{C}(A, F) \subset \mathcal{F}(A, F)$, $\mathcal{C}(A, F) \neq \emptyset$ sont clairs)
En particulier $\mathcal{C}(A, F)$ est un $\mathbb{K}$ ev.
Cette proposition découle directement des propriétés des fonctions continues en un point établies dans le chapitre précédent.

1.2.2 Produit d'applications continues

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-ev normé.
Soient A une partie non vide de E, $f : A \to F$ continue et $\varphi : A \to \mathbb{K}$ continue.
Alors $\varphi f \begin{cases} A \to F \\ x \mapsto \varphi(x).f(x) \end{cases}$ est continue.
En particulier si f_1 et f_2 sont deux fonctions de A dans $\mathbb{K}$ continues alors $f_1 f_2$ est continue.

1.2.3 Composition d'applications continues

Soient $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ et $(G, \|.\|)$ trois espaces vectoriels normés.
Soient A une partie non vide de E et $f : A \to F$ continue.
Soient B une partie non vide de F et $g : B \to G$ continue.
On suppose $f(A) \subset B$.
Alors $g \circ f$ $(A \to G)$ est continue.

2 Fonctions lipschitziennes

2.1 Définition

Soient $(E_1, \|.\|_1)$ et $(E_2, \|.\|_2)$ 2 espaces vectoriels normés.
Soient A_1 une partie non vide de E_1, $f : A_1 \to E_2$ et $k \in \mathbb{R}_+$.
On dit que f est k-lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k ou en abrégé lip_k) si et seulement si :
$\forall (x, y) \in A_1^2 \ d_2(f(x), f(y)) \leq k \, d_1(x, y)$
ou ce qui revient au même :
$\forall (x, y) \in A_1^2 \ \|f(y) - f(x)\|_2 \leq k \ \|y - x\|_1$

Remarque
Dans la pratique si on a plusieurs evn on note $\|.\|$ la norme dans chaque evn (en faisant attention dans la manipulation des normes).
La définition précédente s'écrit alors :

$$f \, k - \text{lipschitzienne} \iff \forall (x, y) \in A_1^2 \ \|f(y) - f(x)\| \leq k \ \|y - x\|$$

Définition
On dit que f est lipschitzienne si et seulement si il existe k dans $\mathbb{R}_+$ tel que f soit lipschitzienne de rapport k.

Remarque
La notion de fonction lipschitzienne est indépendante du choix des normes en dimension finie mais pas la constante k de la définition.
Ce résultat découle de l'équivalence des normes en dimension finie.

2.2 Continuité des fonctions lipschitziennes

Soient $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés et A une partie non vide de E.
Toute application lipschitzienne de A dans F est continue.

Démonstration
Soit $f : A \to F$ lipschitzienne.
$\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall (x, y) \in A^2 \ \|f(y) - f(x)\| \leq k \, \|y - x\|$
Soit $a \in A$.
On va montrer que f est continue en a.
$\forall x \in A \ \|f(x) - f(a)\| \leq k \, \|x - a\|$
Soit $\epsilon > 0$.
On pose $\delta = \dfrac{\epsilon}{k}$.

On a alors pour tout $x \in A$ tel que $\|x-a\| \leq \delta$:
$\|f(x)-f(a)\| \leq \epsilon$
d'où $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ ie f est continue en a.
f est continue en tout point de A donc elle est continue.

2.3 Un exemple fondamental

Proposition
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
La norme est lipschitzienne de rapport 1.
En clair :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \ \ |\|y\| - \|x\|| \leq \|y-x\|}$$

On en déduit en particulier que l'application $\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\| \end{cases}$ est continue.

Démonstration
Soit $(x,y) \in E^2$.
$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ donc :
$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$
De même :
$\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$
Donc $|\|x\| - \|y\|| = \|x\| - \|y\|$ ou $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$

Exemple d'application
Soient $E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés.
Soient A une partie non vide de E et $f : A \to F$ continue.
Alors l'application $\begin{cases} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x)\| \end{cases}$ est continue.

2.4 Remarque à propos de la réciproque

La réciproque est fausse : une fonction continue n'est pas forcément lipschitzienne.
Par exemple la fonction $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est continue mais n'est pas lipschitzienne :
$\forall n \in \mathbb{N} \ \dfrac{f(4^{-n}) - f(0)}{4^{-n} - 0} = 4^n . \dfrac{1}{2^n} = 2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
alors que si f était lipschitzienne cette suite serait bornée.

3 Fermés d'un espace vectoriel normé

3.1 Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
Soit F une partie de E.
On dit que F est un fermé de E si, et seulement si, F est égal à son adhérence ie :
F fermé de $E \Longleftrightarrow \overline{F} = F$

Comme pour toute partie de E $A \subset \overline{A}$, on a :
F fermé de $E \Longleftrightarrow \overline{F} \subset F$

3.2 Remarque

Si E est un espace de dimension finie, la notion de partie fermée est indépendante du choix de la norme.

3.3 Exemples

- Les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont des fermés de $\mathbb{R}$ sont :
  1. $\mathbb{R}$ et $\emptyset$.
  2. les intervalles du type $[a, b]$ avec $a \leq b$.
  3. les intervalles du type $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$.

  On a vu dans le chapitre précédent l'ensemble des points adhérents de tous les types d'intervalle. Il suffit alors de regarder pour chaque type d'intervalle si la condition de la définition est vérifiée.

- Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont fermés.
  Démonstration
  On va montrer :
  $x \notin \mathbb{Z} \Longrightarrow x \notin \overline{\mathbb{Z}}$
  Soit $x \notin \mathbb{Z}$
  On note p la partie entière de x.
  $p < x < p + 1$
  Soit $\epsilon = \min(x - p, p + 1 - x)$.
  $\epsilon > 0$
  Soit $y \in]x - \epsilon; x + \epsilon[$.
  $y < x + \epsilon \leq x + p + 1 - x$ donc $y < p + 1$.
  $y > x - \epsilon \geq x - (x - p) = p$ donc $y > p$
  $p < y < p + 1$ donc $y \notin \mathbb{Z}$.
  Donc $]x - \epsilon; x + \epsilon[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$ et $x \notin \overline{\mathbb{Z}}$.
  On a bien montré :
  $x \notin \mathbb{Z} \Longrightarrow x \notin \overline{\mathbb{Z}}$
  Par contrapposition :
  $x \in \overline{\mathbb{Z}} \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}$
  ie $\overline{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$
  $\mathbb{Z}$ est bien une partie fermée de $\mathbb{R}$.
  On peut montrer de même que $\mathbb{N}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

- Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
  $\emptyset$ et E sont des fermés de E.

  $\forall a \in E\ \forall \epsilon > 0\ \mathcal{B}(a, \epsilon) \cap \emptyset = \emptyset$
  Donc $\overline{\emptyset} = \emptyset$ et $\emptyset$ est fermé.
  L'inclusion $\overline{E} \subset E$ est triviale donc E est fermé.

Proposition
Soit $\|.\|$ une norme sur E.
Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{B}_f(x_0, r)$ et $\mathcal{S}(x_0, r)$ sont des fermés de E.
Les boules fermées et les sphères sont des parties fermées de E.

En effet, il a été vu dans le chapitre précédent :
L'ensemble des points adhérents à $\mathcal{B}_f(x_0, r)$ est $\mathcal{B}_f(x_0, r)$.
L'ensemble des points adhérents à $\mathcal{S}(x_0, r)$ est $\mathcal{S}(x_0, r)$.

3.4 Caractérisation séquentielle

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F une partie de E.
F fermé $\Longleftrightarrow$ F contient la limite de toute suite convergente d'éléments de F
(découle directement de la définition et de la caractérisation séquentielle des points adhérents)

Revenons à la propriété "$\mathbb{Z}$ fermé".
Cela revient à dire que toute suite convergente d'entiers (relatifs) converge vers un entier.
Il est bon de savoir le démontrer directement.
On considère donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs qui converge vers un réel l.
Soit $\epsilon = \frac{1}{4}$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $|x_n - l| \leq \frac{1}{4}$
$\forall p, q \geq n_0$ $|x_p - x_q| \leq |x_p - l| + |l - x_q| \leq \frac{1}{2}$
Mais $x_p - x_q \in \mathbb{Z}$ donc :
$\forall p, q \geq n_0$ $x_p = x_q$
Donc :
$\forall p \geq n_0$ $x_p = x_{n_0}$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et $l = x_{n_0} \in \mathbb{Z}$.

3.5 Réunion de fermés

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, I un ensemble **fini** non vide et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E.
Alors $\bigcup_{i\in I} F_i$ est un fermé de E.
Toute réunion **finie** de fermés de E est un fermé de E.

Démonstration
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers $l \in E$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_i = \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } u_n \in F_i\}$.
$\mathbb{N} = \bigcup_{i\in I} A_i$ et I est fini donc il existe $i_0 \in I$ tel que A_{i_0} est infini.
Il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $\phi(\mathbb{N}) = A_{i_0}$.
La suite $(u_{\phi(n)})$ est extraite la suite (u_n) donc elle converge vers l.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\phi(n)} \in F_{i_0}$ partie fermée de E donc $l \in F_{i_0}$.
On en déduit que $l \in F$.

F est bien une partie fermée de E.

Conséquence
Toute partie finie de E est fermée.

Remarque
L'hypothèse "I fini" est indispensable : sinon toute partie de E serait fermée.

3.6 Intersection de fermés

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, I un ensemble non vide et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E.
Alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un fermé de E.
Toute intersection de fermés de E est un fermé de E.

Démonstration
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers $l \in E$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in F_i$ partie fermée de E donc $l \in F_i$.
On en déduit que $l \in F$.
F est bien une partie fermée de E.

3.7 Continuité et ensembles fermés

3.7.1 Théorème

Soient $(E_1, \|.\|)$ et $(E_2, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E_1 \to E_2$ continue.
Pour tout partie fermée F_2 de E_2, $F_1 = f^{-1}(F_2) = \{x \in E_1 \text{ tq } f(x) \in F_2\}$ est une partie fermée de E_1.

Démonstration
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F_1 qui converge vers $l \in E_1$.
La fonction f est continue donc la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l) \in E_2$.
Mais la suite $(f(u_n))$ est à valeurs dans F_2 partie fermée de E_2 donc $f(l) \in F_2$.
On en déduit que $l \in F_1$.
F_1 est bien une partie fermée de E.

3.7.2 Applications

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$ continue.
$\{x \in E \text{ tq } f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in E \text{ tq } f(x) = 0\}$ sont des fermés de E.

En effet, $\{x \in E \text{ tq } f(x) \geq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $\{x \in E \text{ tq } f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ et $\mathbb{R}_+$ et $\{0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

3.7.3 Remarques

- La remarque précédente est celle qui figure explicitement dans le programme. On peut la généraliser :
  $\{x \in E \text{ tq } f(x) \leq 0\}$, $\{x \in E \text{ tq } f(x) \geq r\}$, $\{x \in E \text{ tq } f(x) \leq r\}$ et $\{x \in E \text{ tq } f(x) = r\}$

sont des fermés de E.

- On dispose ainsi d'un moyen commode d'établir que tel ou tel ensemble est fermé.
  Par exemple, si x_0 est un élément fixé de E, l'application $\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x - x_0\| \end{cases}$ étant continue, on retrouve que $\mathcal{B}_f(x_0, r) = \{x \in E \text{ tq } \|x - x_0\| \leq r\}$ et
  $\mathcal{S}(x_0, r) = \{x \in E \text{ tq } \|x - x_0\| = r\}$ sont des parties fermées de E.

- L'image d'un fermé par une application continue n'est pas en général un fermé.
  Exemples
  $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan x \end{cases}$ est continue.
  $\mathbb{R}_+$ est fermé mais $f(\mathbb{R}_+) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ ne l'est pas.

4 Continuité en dimension finie

4.1 Utilisation d'une base de l'espace d'arrivée

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.
Soit A une partie non vide de E.
Soient $f : A \to F$ et $f_1, \ldots, f_n : A \to \mathbb{K}$ les coordonnées de f.
On a :

$$f \text{ est continue } \iff \forall i \in [\![1; n]\!] \ f_i \text{ est continue}$$

4.2 Continuité des coordonnées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, la fonction $\varphi_i \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto x_i \end{cases}$ est continue.

En effet, si on prend $\|.\| \begin{cases} E \to \mathbb{R}_+ \\ x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j|) \end{cases}$, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ φ_i est lipschitzienne de rapport 1 :

$$\forall \left(x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) \in E^2 \ |\varphi_i(y) - \varphi_i(x)| = |y_i - x_i| \leq \|y - x\|$$

4.3 Continuité des applications linéaires

Théorème
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Toute application linéaire de E dans F est continue.

Démonstration
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si E ou F est de dimension nulle alors $u \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto 0 \end{cases}$ est constante donc continue.
On suppose désormais $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et $\dim F = p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ une base de F.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$
Les coordonnées de u dans $\mathcal{C}$ sont les fonctions :
$$\psi_i \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \end{cases}$$
Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, soit $\phi_j \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto x_j \end{cases}$
On a :

- $\forall i \in [\![1;p]\!]$ $\psi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \phi_j$
- $\forall j \in [\![1;n]\!]$ ϕ_j est continue cf 4.2.

Donc :
$\forall i \in [\![1;p]\!]$ ψ_i est continue cf 1.2
Donc u est continue (cf 4.1).

4.4 Continuité des applications multilinéaires

4.4.1 Théorème

Soient $E_1, \dots, E_p$ et F $p+1$ $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit $\varphi \begin{cases} E_1 \times \cdots \times E_p \to F \\ (V_1, \dots, V_p) \mapsto \varphi(V_1, \dots, V_p) \end{cases}$ une application p-linéaire.
φ est continue.

Démonstration
On commence par le cas $F = \mathbb{K}$.
Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on note $\mathcal{B}_j(e_{j,1}, \dots, e_{j,d_j})$ une base de E_j (d_j est la dimension de E_j).
Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$ et tout $i \in [\![1;d_j]\!]$, on note $\psi_{i,j} \begin{cases} E_1 \times \cdots \times E_p \to \mathbb{K} \\ (V_1, \dots, V_p) \mapsto \text{ la ième coordonnée du vecteur } V_j \end{cases}$.
Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$ et tout $i \in [\![1;d_j]\!]$, $\psi_{i,j}$ est linéaire. En effet c'est la composée de :

- $\pi_j \begin{cases} E_1 \times \cdots \times E_p \to \mathbb{K}^n \\ (V_1, \dots, V_p) \mapsto V_j \end{cases}$
  et de
- $\phi_i \begin{cases} E_j \to \mathbb{K} \\ V = \sum_{k=1}^{d_j} x_k e_{j,k} \mapsto x_i \end{cases}$

toutes deux linéaires.
Par conséquent, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$ et tout $i \in [\![1;d_j]\!]$, $\psi_{i,j}$ est continue.

$$\begin{aligned} & \forall (V_1,\ldots,V_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \\ \varphi(V_1,\ldots,V_p) &= \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{d_1} \phi_{i_1}(V_1)e_{i_1}, V_2,\ldots,V_p\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{d_1} \phi_{i_1}(V_1)\varphi\left(e_{i_1}, V_2,\ldots,V_p\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{d_1} \phi_{i_1}(V_1)\varphi\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{d_2} \phi_{i_2}(V_2)e_{i_2}, V_3,\ldots,V_p\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{d_1}\sum_{i_2=1}^{d_2} \phi_{i_1}(V_1)\phi_{i_2}(V_2)\varphi\left(e_{i_1}, e_{i_2}, V_3,\ldots,V_p\right) \\ &= \ldots \\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_p)\in[\![1;d_1]\!]\times\cdots\times[\![1;d_p]\!]} \varphi\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_p}\right)\phi_{i_1}(V_1)\phi_{i_2}(V_2)\ldots\phi_{i_p}(V_p) \end{aligned}$$

Donc $\varphi = \sum_{(i_1,\ldots,i_p)\in[\![1;d_1]\!]\times\cdots\times[\![1;d_p]\!]} \varphi\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_p}\right)\psi_{i_1,1}\ldots\psi_{i_p,p}$.
On en déduit que φ est continue.

Dans le cas où F est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie quelconque, on choisit une base de F. D'après ce qui précède, les coordonnées de φ sont continues.On en déduit que φ est continue.

4.4.2 Continuité du déterminant

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, l'application $\begin{cases} E^n \to \mathbb{K} \\ (V_1,\ldots,V_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(V_1,\ldots,V_n) \end{cases}$ est continue.

4.4.3 Continuité du produit matriciel

L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A,B) \mapsto AB \end{cases}$ est continue.
Donc, par exemple, si $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui convergent alors la suite $(A_pB_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et on a :
$\lim\limits_{p\to+\infty}(A_pB_p) = \left(\lim\limits_{p\to+\infty} A_p\right).\left(\lim\limits_{p\to+\infty} B_p\right)$.

4.4.4 Continuité du produit scalaire

Soit E un ev euclidien.
L'application $\begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto (x|y) \end{cases}$ est continue.
On en déduit par exemple :

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans E qui convergent.
  Alors la suite réelle $((u_n|v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :
  $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n|v_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n | \lim\limits_{n\to+\infty} v_n)$
- Soient F un ev sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie et A une partie non vide de F.
  Si f et $g : A \to E$ sont continues alors $h : \begin{cases} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (f(x)|g(x)) \end{cases}$ est continue.

4.5 Continuité des fonctions polynômiales sur $\mathbb{K}^n$

On appelle fonction monôme sur $\mathbb{K}^n$ toute fonction de la forme :
$\begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \end{cases}$
où pour tout $i \in \{1;\dots,n\}$ $\alpha_i \in \mathbb{N}$.
On appelle fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ toute combinaison linéaire de fonctions monômes.
Exemple
$\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+3x^3yz+4xy^2z^4+5 \end{cases}$
L'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^n$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K})$ donc en particulier un $\mathbb{K}$-ev. De plus il est stable par le produit interne de $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K})$.

Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ est continue.

En particulier l'application $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ A \mapsto \det A \end{cases}$ est continue.

Application
Soit $n \geq 1$.
Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- **Premier cas :** $A \in GL_n(\mathbb{K})$
  $BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}(AB)\,(A^{-1})^{-1}$
  Les matrices AB et BA sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique.
- **Deuxième cas :** $A \notin GL_n(\mathbb{K})$
  Il existe une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers A.
  $\forall\lambda \in \mathbb{K}\ \forall p \in \mathbb{N}\ \det(\lambda I_n - A_pB) = \det(\lambda I_n - BA_p)$ cf le premier cas.
  On fixe λ et on fait tendre p vers $+\infty$.
  $\forall\lambda \in \mathbb{K}\ \det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$
  D'où le résultat car $\mathbb{K}$ est infini.

Mines 2021
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
1. (a) On suppose que A est inversible.
   Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   (b) On admet que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.
   Montrer le résultat précédent pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que A^TA et AA^T sont semblables.

Question supplémentaire en fin d'oral : Avez-vous une idée pour montrer ce qui a été admis en 1)b) ?

Correction

On vient de voir comment traiter la première question.

Pour la seconde, A^TA et AA^T sont diagonalisables car symétriques réelles. Comme elles ont le même polynôme caractéristique, elles sont semblables à la même diagonale donc semblables entre elles.

4.6 Continuité des fonctions rationnelles sur $\mathbb{K}^n$

Ce paragraphe n'est pas mentionné dans le programme.

On appelle fonction rationnelle sur $\mathbb{K}^n$ tout quotient de fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^n$.

Toute fonction rationnelle de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est continue sur son domaine de définition.

Exemples

- La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car c'est une fonction rationnelle sur cet ensemble. Par contre, elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ car on a vu qu'elle n'avait pas de limite en $(0,0)$ donc qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$.
- La fonction $g \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car c'est une fonction rationnelle sur cet ensemble. On a vu que g est continue en $(0,0)$. g est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
- L'application $\begin{cases} GL_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A \mapsto A^{-1} \end{cases}$ est continue.

4.7 Théorème des bornes atteintes

4.7.1 Théorème

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée non vide d'un espace de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Dit autrement :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F une partie non vide de E fermée et bornée et $f : F \to \mathbb{R}$ continue.

Il existe x_{min} et x_{Max} appartenant à F tels que :

$\forall x \in F \; f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{Max})$

Remarques

- La démonstration de ce théorème n'est pas exigible.
- Ce théorème est une généralisation d'un résultat vu en Sup :
  Toute fonction réelle continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

4.7.2 Exemples

- Soit $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ unitaire}\}$.
  Montrer que $\inf\limits_{P\in E_n} \int_0^1 |P(t)|\ \mathrm{d}t$ est atteint.
  $N \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_0^1 |P(t)|\ \mathrm{d}t \end{cases}$ est continue (c'est une norme).

$$\begin{aligned} E_n &= \left\{P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ tq } \exists k_0 \in [\![0;n]\!] \text{ tq } a_{k_0} = 1 \text{ et } \forall k > k_0\ a_k = 0\right\} \\ &= \bigcup_{k_0=0}^{n} \left\{P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ tq } a_{k_0} = 1 \text{ et } \forall k > k_0\ a_k = 0\right\} \\ &= \bigcup_{k_0=0}^{n} \left(\{P \text{ tq } a_{k_0} = 1\} \bigcap \left(\bigcap_{k=k_0+1}^{n} \{P \text{ tq } a_k = 0\}\right)\right) \end{aligned}$$

  Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto a_k \end{cases}$ est continue (linéaire en dimension finie) donc :
  $\{P \text{ tq } a_k = 1\}$ et $\{P \text{ tq } a_k = 0\}$ sont des fermés.
  Une intersection de fermés est un fermé donc :
  Pour tout $k_0 \in [\![0;n]\!]$, $\{P \text{ tq } a_{k_0} = 1\} \bigcap \left(\bigcap\limits_{k=k_0+1}^{n} \{P \text{ tq } a_k = 0\}\right)$ est fermé.
  E_n est une réunion FINIE de fermés donc E_n est fermé.
  On peut alors montrer la généralisation suivante :
  Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
  Soit F un fermé de E tel que $0 \notin F$.
  Alors :
  $\exists x_0 \in F$ tq $\forall x \in F\ \ \|x\| \geq \|x_0\|$ (faire un dessin)
  Le résultat est trivial si $0 \in F$ ($x_0 = 0$).
  Soit $y \in F$ quelconque.
  Soit $K = F \cap \mathcal{B}_f(0, \|y\|)$.
  K est une partie fermée et bornée de E et K est non vide : $y \in K$.
  Donc :
  $\exists x_0 \in K$ tq $\forall x \in K\ \ \|x\| \geq \|x_0\|$.
  $K \subset F$ donc $x_0 \in F$.
  Soit $x \in F$.
  Si $x \in K$ alors $\|x\| \geq \|x_0\|$.
  Si $x \notin K$ alors $\|x\| > \|y\|$.
  Mais $y \in K$ donc $\|y\| \geq \|x_0\|$ et $\|x\| \geq \|x_0\|$.
  On a bien :
  $\forall x \in F\ \ \|x\| \geq \|x_0\|$
  Pour en revenir à la question initiale, $\inf\limits_{P\in E_n} \int_0^1 |P(t)|\ \mathrm{d}t$ est atteint et est donc strictement positif.

- Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle.
  Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue.

On suppose qu'il existe $\|.\|$ une norme sur E telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$.
Montrer : $\exists x_0 \in E$ tq $\forall x \in E$ $f(x) \geq f(x_0)$

Attention : E est fermé mais E n'est pas borné.
$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists R \geq 0$ tq $\forall x \in E$ $\|x\| \geq R \Longrightarrow f(x) \geq M$.
On prend $M = f(0)$.
$\exists R \geq 0$ tq $\forall x \in E$ $\|x\| \geq R \Longrightarrow f(x) \geq f(0)$.
f est continue et $\mathcal{B}_f(0,R)$ est une partie fermée et bornée de E donc :
$\exists x_0 \in \mathcal{B}_f(0,R)$ tq $\forall x \in \mathcal{B}_f(0,R)$ $f(x) \geq f(x_0)$.
$0 \in \mathcal{B}_f(0,R)$ donc $f(0) \geq f(x_0)$
Soit $x \in E$.
Si $x \in \mathcal{B}_f(0,R)$ alors $f(x) \geq f(x_0)$.
Si $x \notin \mathcal{B}_f(0,R)$ alors $f(x) \geq f(0) \geq f(x_0)$.
Donc :
$\forall x \in E$ $f(x) \geq f(x_0)$

- **Centrale 2010**
Montrer que $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant vérifiant $P(0) = 1$, peut s'écrire
$P(X) = 1 + aX^r + X^{r+1}R$ avec $r \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $R \in \mathbb{C}[X]$.
Montrer qu'il existe une constante positive C telle que, pour tout z vérifiant $z^r = -a^{-1}$ et tout $\epsilon \in [0;1]$, on a $|P(\epsilon z)| \leq 1 - \epsilon^r + C\epsilon^{r+1}$.
En déduire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| < 1$.
Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe un réel positif R tel que pour tout complexe z de module supérieur ou égal à R, $|Q(z)| \geq |Q(0)|$.
Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Q(z)| \geq |Q(z_0)|$.
Déduire de toute l'étude faite que $Q(z_0) = 0$.

Correction
Soit n le degré de P.
$n \geq 1$ car P n'est pas constant.
$\{i \in [\![1;n]\!]$ tq $a_i \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède un minimum. Notons le r. $r \in \mathbb{N}^*$.
$\forall i \in [\![1;r-1]\!]$ $a_i = 0$
Donc :

$$\begin{aligned} P(X) &= a_0 + \sum_{i=r}^{n} a_i X^i = P(0) + a_r X^r + \sum_{i=r+1}^{n} a_i X^i \\ &= 1 + aX^r + X^{r+1}R(X) \text{ avec } a = a_r \neq 0 \text{ et } R = \sum_{i=r+1}^{n} a_i X^{i+r-1 \geq 0} \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Soit z une racine $r^{\text{ième}}$ de $-a^{-1}$ (et il en existe).

$$\begin{aligned} \forall \epsilon \in [0;1]\ P(\epsilon z) &= 1 + a\epsilon^r \left(z^r = -a^{-1}\right) + \epsilon^{r+1} z^{r+1} R(\epsilon z) \\ &= 1 - \epsilon^r + \epsilon^{r+1} z^{r+1} R(\epsilon z) \\ |P(\epsilon z)| &\leq |1 - \epsilon^r \geq 0| + \epsilon^{r+1} |z|^{r+1} |R(\epsilon z)| \\ &\leq 1 - \epsilon^r + \epsilon^{r+1} |z|^{r+1} |R(\epsilon z)| \end{aligned}$$

$z^r = -\dfrac{1}{a}$ donc $|z|^r = \dfrac{1}{|a|}$ et $|z| = |a|^{-1/r}$.

$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |R(x)| \end{cases}$ est continue et $\mathcal{B}_f(0, |a|^{-1/r})$ est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{C}$ donc :

$\exists D \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in \mathcal{B}_f(0, |a|^{-1/r})\ |R(x)| \leq D$

$\forall \epsilon \in [0;1]\ |P(\epsilon z)| \leq 1 - \epsilon^r + \epsilon^{r+1} |a|^{-(r+1)/r} D$

D'où le résultat avec $C = |a|^{-(r+1)/r} D$

$\forall \epsilon \in [0;1]\ |P(\epsilon z)| \leq 1 - \epsilon^r(1 + C\epsilon)$

On prend $\epsilon = \dfrac{1}{C+1} \in [0;1]$.

$$\begin{aligned} \left|P\left(\frac{z}{C+1}\right)\right| &\leq 1 - (C+1)^{-r}\left(1 - \frac{C}{C+1}\right) \\ &\leq 1 - \left((C+1)^{-r}\frac{1}{C+1} > 0\right) < 1 \end{aligned}$$

$|Q(z)| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} +\infty$

$Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant donc :

$Q = a_n X^n + \cdots + a_0$ avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$.

$\forall z \in \mathbb{C}^*\ Q(z) = z^n \left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \dfrac{a_0}{z^n}\right)$

$|a_n + a_{n-1}t + \cdots + a_0 t^n| \xrightarrow[\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{C}}]{} |a_n| > 0$ donc :

$\exists \rho > 0$ tq $\forall t \in \mathcal{B}_f(0, \rho)\ |a_n + a_{n-1}t + \cdots + a_0 t^n| \geq \dfrac{|a_n|}{2}$

$\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| \geq \dfrac{1}{\rho}\ |Q(z)| \geq \dfrac{|a_n|}{2} |z|^n$

$\dfrac{|a_n|}{2} t^n \xrightarrow[\substack{t \to +\infty \\ t \in \mathbb{R}}]{} +\infty$ donc :

$\exists A > 0$ tq $\forall t \in [A; +\infty[\ \dfrac{|a_n|}{2} t^n \geq |Q(0)|$

Soit $R = \max\left(A, \dfrac{1}{\rho}\right)$.

$\forall z \in \mathbb{C}\ |z| \geq R \Longrightarrow |Q(z)| \geq |Q(0)|$

$\mathcal{B}_f(0, \mathbb{R})$ est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{C}$ donc :

$\exists z_0 \in \mathcal{B}_f(0, \mathbb{R})$ tq $\forall z \in \mathcal{B}_f(0, \mathbb{R})\ |Q(z)| \geq |Q(z_0)|$

En particulier : $|Q(0)| \geq |Q(z_0)|$

Donc :

$\forall z \in \mathbb{C}\ |Q(z)| \geq |Q(z_0)|$

Supposons $Q(z_0) \neq 0$.

Soit $P(X) = \dfrac{Q(z_0 + X)}{Q(z_0)}$.

P n'est pas constant et $P(0) = 1$.

Donc :

$\exists z_1 \in \mathbb{C}$ tq $|P(z_1)| < 1$

Donc : $\left|\dfrac{Q(z_0 + z_1)}{Q(z_0)}\right| < 1$ et $|Q(z_0 + z_1)| < |Q(z_0)|$

C'est absurde donc $Q(z_0) = 0$.