ALGEBRE LINEAIRE
TD
2024-2025
Chapitre 4

941

1 Trigonalisation

Exercice 1 *(Mines 2021)*

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0\}$ et $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

1. CNS pour que M soit diagonalisable.
2. Dans le cas où M n'est pas diagonalisable, montrer qu'elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Calcul de M^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Soient $a > 0$ et $S_a : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application qui à f associe :
$S_a(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$

1. Soit $f : t \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi t}{a}\right)$.
   Calculer $S_a(f)$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   Montrer que $S_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer que S_a n'est ni injective ni surjective.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que S_a induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$ qu'on notera s_a.
5. Montrer que s_a est un automorphisme.
6. Montrer que dans une base bien choisie la matrice de s_a est triangulaire supérieure.
7. L'endomorphisme s_a est-il diagonalisable ?

Exercice 3 *(Centrale 2009)*

On rappelle que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

1. Montrer que f est un $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathbb{C}$ si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C}\ f(z) = a\,z + b\,\overline{z}$$
2. Exprimer simplement le déterminant de f.
3. Caractériser les $\mathbb{R}$-endomorphismes de $\mathbb{C}$ trigonalisables.

Exercice 4 *(CCP 2013)*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (E_1, E_2, E_3).

1. On admet que 3 et -1 sont les seules valeurs propres de f.
   f est-il bijectif ? Donner une base de ses sous-espaces propres. A est-elle diagonalisable ?
2. On choisit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = E_1 + \lambda e_1$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
   Comment choisir λ et μ pour que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Exercice 5 *(X 2015)*

Soit A une matrice carrée 2×2 complexe, inversible.
On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A^p soit diagonalisable.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 6 *(X 2011)*

Soit A une matrice carrée 2×2 complexe, inversible et telle que les suites $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((A^{-1})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soient bornées.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont de module égal à 1.