ALGEBRE LINEAIRE
TD
2022-2023
Chapitre 6
Correction

941

Exercice 1 *(CCP 2015)*

Trouver les matrices A dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

M étant diagonale, on a immédiatement ses éléments propres : les valeurs propres de M sont 1 et 2 simples et -1 double.

Les sous-espaces propres de M sont $E_1(M) = \mathbb{R}e_1$, $E_2(M) = \mathbb{R}e_2$ et $E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ où (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Si $A^2 = M$ alors A et M commutent et les sous-espaces propres de M sont stables par A.

A est donc de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$ où B est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On cherche donc les racines carrées de M parmi les matrices de cette forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}^2 = M \iff \begin{cases} \lambda_1^2 = 1 \\ \lambda_2^2 = 2 \\ B^2 = -I_2 \end{cases}$$

Les racines carrées de M sont donc les matrices $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$ où B est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = -I_2$.

On peut déterminer B en la cherchant sous la forme $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ceci dit si λ est valeur propre de B alors $\lambda^2 = -1$ et $\lambda = \pm i$.

B étant réelle, i et $-i$ sont valeurs propres de B.

D'où $a + d = \mathrm{tr}\,(B) = i - i = 0$.

De même $ad - bc = -a^2 - bc = 1$.

Donc B est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

La réciproque ne pose pas de problème.

Exercice 2 *(Mines 2018)*

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction

- **Première méthode**

  La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire donc on a immédiatement ses valeurs propres : il s'agit de 0 triple.

  Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tq $X^2 = M$.

  Soit λ une valeur propre de X.

  Il existe une colonne C non nulle telle que $XC = \lambda C$.

  On a alors $MC = X^2C = \lambda^2 C$ avec $C \neq 0$ donc λ^2 est valeur propre de M. On en déduit $\lambda^2 = 0$ puis $\lambda = 0$.

  X, comme toute matrice complexe, est trigonalisable (son polynôme caractéristique est scindé en vertu du théorème de d'Alembert-Gauss), et il existe une matrice P inversible telle que $X = P \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

  $X^2 = P \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & ca \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ est de rang au plus 1 alors que M est de rang 2.

  On aboutit à une contradiction donc il n'existe pas de matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Deuxième méthode**

  $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3$

  D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $M^3 = 0$, ce qu'il est très facile de prouver directement.

  Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tq $A^2 = M$.

  $A^6 = M^3 = 0$ donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$.

  Mais $\det(A)^2 = \det(A^2) = \det(M) = 0$ donc $\det(A) = 0$ et $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

  On a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et par d'Alembert-Gauss, χ_A est un polynôme unitaire de degré 3 scindé.

  On en déduit $\chi_A = X^3$.

  D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^3 = 0$.

  On en déduit $M^2 = A^4 = 0$.

Mais $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On aboutit à une contradiction donc M n'a pas de racine carrée.

Exercice 3 *(Mines 2018)*

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
Soit $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f \circ g = g \circ f\}$.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tq $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.
2. Montrer que $(Id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}$.

Correction

1. $f^{n-1} \neq 0$ donc il existe $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$.
   Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a) = 0$.
   Supposons $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$.
   On peut définir $k = \min(\{i \in [\![0, n-1]\!] \text{ tq } \lambda_i \neq 0\})$.
   On a : $\sum_{i=k}^{n-1} \lambda_i f^i(a) = 0$.
   On applique f^{n-1-k}, qui ne pose pas de problème de définition car $n-1-k \geq 0$.
   Il reste $\lambda_k f^{n-1}(a)$ avec $\lambda_k \neq 0$ et $f^{n-1}(a) \neq 0$.
   On aboutit à une contradiction donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, \dots, 0)$.
   La famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est donc libre.
   Vu son cardinal, c'est une base de E.
2. C'est clairement une famille de $\mathcal{C}$.
   Elle est libre :
   Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i = 0$
   On évalue en a :
   $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a) = 0$
   D'après la première question, les λ_i sont tous nuls.
   Reste à montrer qu'elle est génératrice.
   Soit $g \in \mathcal{C}$.
   g commute avec f donc par une récurrence triviale, g commute avec toutes les puissances de f.
   $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E donc il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tq $g(a) =$

$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a)$.

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1; n-1]\!]\ g(f^k(a)) &= f^k(g(a)) = f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^k(f^i(a)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(f^k(a))\end{aligned}$$

On en déduit $g = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i$.
(deux endomorphismes qui coïncident sur une base sont égaux)