

ALGÈBRE LINÉAIRE

PC*1

2024 - 2025

Chapitre 5 : Commutation

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Vecteurs propres communs

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent ont un vecteur propre en commun.

Démonstration

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

Soient u et v les endomorphismes canoniquement associés.

$$u \circ v = v \circ u$$

χ_u est un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il possède au moins une racine λ .

λ est une valeur propre de u .

u et v commutent donc les sous-espaces propres de u sont stables par v .

$E_\lambda(u)$ est stable par v ce qui permet de définir :

$$w \begin{cases} E_\lambda(u) \rightarrow E_\lambda(u) \\ x \mapsto v(x) \end{cases}$$

$E_\lambda(u)$ est un \mathbb{C} -ev de dimension finie non nulle d .

χ_w est un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il possède au moins une racine μ .

μ est une valeur propre de w .

Soit x_0 un vecteur propre de w associé à μ .

$$x_0 \neq 0$$

$$v(x_0) = w(x_0) = \mu x_0$$

$$u(x_0) = \lambda x_0$$

x_0 est un vecteur propre commun à u et à v .

Matriciellement, A et B ont un vecteur propre commun.

2 Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

- X 2016

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer :

u et v commutent \iff les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Correction

— \implies

L'hypothèse u diagonalisable n'est pas utile.

Soit $x \in E_\lambda(u) : u(x) = \lambda x$

$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$

Donc $v(x) \in \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = E_\lambda(u)$.

$E_\lambda(u)$ est stable par v .

— \impliedby

L'hypothèse u diagonalisable est utile.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u .

Soit $x \in E$.

$\exists(!)(x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1}(u) \times \dots \times E_{\lambda_p}(u)$ tq $x = \sum_{i=1}^p x_i$ (on utilise u diagonalisable)

$$u \circ v(x) = \sum_{i=1}^p u(v(x_i) \in E_{\lambda_i}(u)) = \sum_{i=1}^p \lambda_i v(x_i)$$

$$\begin{aligned} v \circ u(x) &= \sum_{i=1}^p v(u(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^p v(\lambda_i x_i) \text{ car } x_i \in E_{\lambda_i}(u) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i v(x_i) = u \circ v(x) \end{aligned}$$

• **Mines 2019**

Soit E un \mathbb{K} ev de dimension finie.

Soit u un endomorphisme diagonalisable de E .

Montrer que la dimension du commutant de E est $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\dim(E_\lambda(u)))^2$.

• **X 2015**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.

On note $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tq } AB = BA\}$.

Etudier la dimension de $\mathcal{C}(A)$ selon les multiplicités des racines du polynôme caractéristique de A .

Remarques de l'examinateur

— Cas $n = 2, n = 3$ puis cas général.

— Stabilité par B de $E_\lambda(A)$, B DZ dans la même base que A si toutes les valeurs propres sont simples.

Correction

On poursuit avec les notations de l'exercice précédent.

Le commutant de u ie $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ v = v \circ u\}$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ ¹ "naturel-

1. clair par ailleurs

lement" isomorphe à $\prod_{i=1}^p \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(u))$. Donc :

$$\dim(\mathcal{C}(u)) = \sum_{i=1}^p (\dim(E_{\lambda_i}(u)))^2 = \sum_{i=1}^p (\text{mul}(\lambda_i))^2$$

Examinons maintenant une méthode matricielle.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tq } A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont deux à deux distincts.}$$

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket d_i = \dim E_{\lambda_i}(A) = \text{mul}(\lambda_i)$$

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$AB = BA \iff u_A \circ u_B = u_B \circ u_A$$

\iff les sous-espaces propres de u_A sont stables par u_B (car u_A est diagonalisable)

$$\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_B) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_p \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket B_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$$

où \mathcal{B} est la base de \mathbb{K}^n formée par les colonnes de P

$$\iff B = P \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_p \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket B_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$$

$\mathcal{C}(A)$ est donc un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\sum_{i=1}^p d_i^2 = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \text{mul}(\lambda)^2$.

• **X 2013**

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$ des matrices qui commutent avec A ?
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonalisable, ayant exactement $n - 1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Quel est le rang de l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\Phi(M) = AM - MA$?

Correction

1. En appliquant les résultats des exercices précédents, la réponse est $\sum_{i=1}^n 1^2 = n$
2. A a $n - 2$ valeurs propres simples et une double.
Le noyau de Φ , qui est aussi le commutant de A est de dimension $n - 2 + 4 = n + 2$.
Le rang de Φ est donc $n^2 - n - 2$.

2.1 Commutant d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples

Exercice 1 (X 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

2. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$.

Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $v = a_0 \text{id}_E + a_1 u + \dots + a_{n-1} u^{n-1}$.

Mines 2016, 2017

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle commutant de u l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ v = v \circ u\}.$$

On suppose que u a n valeurs propres distinctes.

Montrer que $\mathcal{C}(u) = \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$.

Correction

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes.

On sait qu'alors u est diagonalisable.

Soit \mathcal{B} une base de E formée de vecteurs propres de u .

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.

On va montrer :

$u \circ v = v \circ u \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale.

Je vais le faire indépendamment de ce qui précède.

• \implies

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit λ_i la valeur propre associée à e_i .

$e_i \in E_{\lambda_i}(u)$, de dimension 1 donc :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad E_{\lambda_i}(u) = \mathbb{K}e_i$$

$u \circ v = v \circ u$ donc les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$e_i \in E_{\lambda_i}(u)$ et $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par u donc : $v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$

$v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$ et $E_{\lambda_i}(u) = \mathbb{K}e_i$ donc $v(e_i) \in \mathbb{K}e_i$ ie : $\exists \mu_i \in \mathbb{K}$ tq $v(e_i) = \mu_i e_i$

D'où $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$

• \impliedby

Trivial : deux matrices diagonales commutent.

On a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k \circ u = u \circ u^k$$

Donc :

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad u^k \in \mathcal{C}(u)$$

Or $\mathcal{C}(u)$ est stable par combinaisons linéaires donc $\text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset \mathcal{C}(u)$.

Réciproquement, soit $v \in \mathcal{C}(u)$.

Si on reprend la base \mathcal{B} ci-dessus, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \right) = \text{Diag} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_n^k \right) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = v \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k = \mu_i$$

Le système linéaire $\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_1^k = \mu_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_n^k = \mu_n \end{cases}$ d'inconnues a_0, \dots, a_{n-1} a pour déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \text{ car les } \lambda_i \text{ sont deux à deux distincts.}$$

D'où l'existence, et l'unicité, de coefficients a_0, \dots, a_{n-1} tq $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ et $v \in \text{Vect}(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$.

On peut également invoquer l'interpolation de Lagrange.

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = v \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket P(\lambda_i) = \mu_i \text{ où } P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Les λ_i étant n nombres deux à deux distincts, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Centrale 2022

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

On note $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f \circ g = g \circ f\}$ le commutant de f .

1. Montrer :

$$g \in \mathcal{C}(f) \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(f) E_\lambda(f) \text{ est stable par } g$$

2. Montrer : $\dim(\mathcal{C}(f)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{mult}(\lambda)^2$

3. On suppose que toutes les valeurs propres de f sont simples.

Montrer que $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(f)$.

3 Exemple de recherche des racines carrées d'une matrice carrée

Trouver toutes les matrices B telles que $B^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Centrale 2012).

Correction

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 4 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \text{ développement par rapport à la deuxième colonne} \\ &= (\lambda - 4) ((\lambda - 1)^2 - 1) = (\lambda - 4)(\lambda - 1 - 1)(\lambda - 1 + 1) \end{aligned}$$

$$\chi_A = (X - 4)(X - 2)X$$

χ_A est scindé à racines simples sur \mathbb{R} donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La deuxième colonne de A est $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 4.

4 est valeur propre simple donc $E_4(A)$ est de dimension 1.

On a donc sans résolution de système $E_4(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ x + 4y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4y \\ z = 4y \end{cases}$$

Donc $E_0(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = -2y \end{cases}$$

Donc $E_2(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

D'où $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

sans calcul de P^{-1} .

Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $B^2 = A$ alors :

$$AB = B^2.B = B^3 = B.B^2 = BA$$

B commute avec A donc les sous-espaces propres de A sont stables par B .

$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_0(A)$ et $E_0(A)$ est stable par B donc $B \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_0(A)$.

$B \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_0(A)$ et $E_0(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $B \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $B \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et $E_2(A)$ est stable par B donc $B \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_2(A)$.

$B \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et $E_2(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $B \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $B \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_4(A)$ et $E_4(A)$ est stable par B donc $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_4(A)$.

$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_4(A)$ et $E_4(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $B = P \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} P^{-1}$.

On peut donc chercher les racines carrées de A sous cette forme.

On a alors :

$$\begin{aligned} B^2 = A &\iff P \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\iff \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 2 \\ z^2 = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

A a 4 racines carrées :

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Pour les expliciter, il faut calculer P^{-1} .

Leur somme est la matrice nulle.

Leur produit est :

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} = A^2$$

4 Exercices d'application directe du cours

Exercice 2 (X 2013)

Quel est le nombre de solutions de $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Exercice 3 (*Mines 2016*)

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 = id_E$.

Montrer que $E = \sum_{k=0}^2 \text{Ker}(f - j^k id_E)$ et donner la dimension du commutant de f .

Exercice 4 (*Mines 2018*)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les éléments propres de f .

Déterminer les $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g^3 = f$.

Exercice 5 (*Mines 2019*)

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = \text{Card}(\text{Sp}(B)) = n$.

Montrer :

$AB = BA \iff A$ et B ont les mêmes vecteurs propres.

Exercice 6 (*Mines 2019*)

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que si M est nilpotente alors les valeurs propres de M sont nulles.

Quelle est la trace de M ?

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Existe-t-il un réel λ tel que $A - \lambda I_3$ soit nilpotente?

(b) Trouver les sous-espaces propres de A .

(c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5 Pour aller plus loin

Les exercices qui suivent sont plus difficiles mais reprennent l'idée de la démonstration de la trigonalisabilité des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 7 (*X 2019*)

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{C}^n$ $(x, u(x))$ est liée.

Que dire de u ?

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr}(M) = 0$.

Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que tous les coefficients diagonaux de $P^{-1}MP$ soient nuls.

3. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension k de \mathbb{C}^n .
Que dire de u ?

Exercice 8 (*Centrale 2018*)

Soit $A = \text{Diag}(1, 2, \dots, n)$.

Soit $g \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$.

1. Montrer que $\text{Im}(g)$ est l'ensemble des matrices de diagonales nulles.
2. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.
Montrer qu'il existe B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = BC - CB$.

Exercice 9 (*X 2018*)

1. Soit $(u_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux.
Montrer que les u_i sont simultanément diagonalisables.
2. Que dire si les u_i sont seulement supposés trigonalisables ?