ALGEBRE LINEAIRE
2024-2025
Correction des exercices du cinquième chapitre du cours

Exercice 1 *(X 2013)*

Quel est le nombre de solutions de $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Correction
Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$\chi_M = X^2 - \mathrm{tr}\,(M)X + \det(M) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$E_1(M) = \mathbb{R}\epsilon_1$ avec $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$E_2(M) = \mathbb{R}\epsilon_2$ avec $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq $A^2 = M$.
A et M commutent donc les sous-espaces propres de A sont stables par M.
$\epsilon_1 \in E_1(M)$ stable par A donc $A\epsilon_1 \in E_1(M) = \mathbb{R}\epsilon_1$.
On en déduit :
$\exists x \in \mathbb{R}$ tq $A\epsilon_1 = x\epsilon_1$
De même :
$\exists y \in \mathbb{R}$ tq $A\epsilon_2 = y\epsilon_2$
Si on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a donc :
$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $y^2 = -1$ ce qui est impossible.
Il n'y a pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On aurait pu le voir plus rapidement :
si A existe alors $(\det(A))^2 = \det(A^2) = \det(M) = -1$: absurde.
Passons sur $\mathbb{C}$.
Le début est le même mais cette fois x et y sont complexes, vérifiant $x^2 = 1$ et $y^2 = -1$ soit $x = \pm 1$ et $y = \pm i$.
La réciproque est immédiate et il y a 4 solutions : $P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix} P^{-1}$

Exercice 2 *(Mines 2016)*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 = id_E$.
Montrer que $E = \sum_{k=0}^{2} \mathrm{Ker}\,(f - j^k id_E)$ et donner la dimension du commutant de f.

Correction
f est annulé par $P = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$.
P est scindé à racines simples donc f est diagonalisable.
On a donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_E)$ avec $\mathrm{Sp}(f) \subset \{1; j; j^2\}$.
De plus si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(f)$ alors $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_E) = \{0\}$ donc :
$E = \bigoplus_{k=0}^{2} \mathrm{Ker}\,(f - j^k id_E)$.
J'ai rédigé la suite de l'exercice avec $\mathrm{Sp}(f) = \{1; j; j^2\}$.Le résultat final est le même si $\mathrm{Sp}(f)$ est strictement contenu dans $\{1; j; j^2\}$, je n'ai pas jugé utile de rédiger une solution séparée.
Nous allons montrer que la dimension du commutant de f est $\sum_{k=0}^{2} \Big(\dim \Big(\mathrm{Ker}\,(f - j^k id_E)\Big)\Big)^2$.
Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.
D'après le cours les sous-espaces propres de f sont stables par g : démonstration à savoir refaire.
Réciproquement soit g un endomorphisme de E qui stabilise les sous-espaces propres de f ie les $\mathrm{Ker}\,(f - j^k id_E)$.
Soit $x \in E$.
$x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_k \in \mathrm{Ker}\,(f - j^k id_E)$
$g(x) = g(x_0) + g(x_1) + g(x_2)$ avec $g(x_k) \in \mathrm{Ker}\,(f - j^k id_E)$
$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f(g(x_1)) + f(g(x_2)) = g(x_0) + jg(x_1) + j^2 g(x_2)$
$f(x) = x_0 + jx_1 + j^2 x_2$
$g(f(x)) = g(x_0) + jg(x_1) + j^2 g(x_2)$
Donc $f(g(x)) = g(f(x))$
Donc g commute avec f.
On a donc montré :

$$f \circ g = g \circ f \iff \forall k \in [\![0;2]\!]\ \mathrm{Ker}\,(f - j^k id_E) \text{ est stable par } g$$

Prenons alors $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à $E = \bigoplus_{k=0}^{2} \mathrm{Ker}\,(f - j^k id_E)$.
D'après le cours, paragraphe 6.3.4 :

$$f \circ g = g \circ f \iff Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \forall k \in [\![0;2]\!]\ A_k \in \mathcal{M}_{\dim(\mathrm{Ker}\,(f - j^k id_E))}(\mathbb{C})$$

L'application $g \in \mathcal{L}(E) \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(g)$ étant un isomorphisme, la dimension du commutant de f est $\sum_{k=0}^{2} \Big(\dim \Big(Ker(f - j^k id_E)\Big)\Big)^2$.
f étant diagonalisable, la dimension d'un sous-espace propre de f est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.

Exercice 3 *(Mines 2018)*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les éléments propres de f.
Déterminer les $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g^3 = f$.

Correction

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_f(\lambda) &= \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda\left((\lambda-1)^2-4\right) = \lambda(\lambda-1-2)(\lambda-1+2) \end{aligned}$$

$\chi_f = X(X-3)(X+1)$ est scindé à racines simples donc f est diagonalisable.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f) \iff \begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+y=0 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Donc $E_0(f) = \operatorname{Ker}(f) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(f) \iff \begin{cases} -2x+2y=0 \\ 2x-2y=0 \\ y-3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ x=y \\ y=3z \end{cases} \iff \begin{cases} x=3z \\ y=3z \end{cases}$$

Donc $E_3(f) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(f) \iff \begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ x=-y \\ y=-z \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=-z \end{cases}$$

Donc $E_{-1}(f) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^3 = f$.
$g \circ f = f^3 \circ f = f^4 = f \circ f^3 = f \circ g$
f et g commutent donc les sous-espaces propres de f sont stables par g.
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_0(f)$ et $E_0(f)$ est stable par g donc $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \in E_0(f)$.

$g\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \in E_0(f)$ et $E_0(f) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $g\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

On a alors :
$0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = g^3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x^3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
On en déduit $x = 0$.

$\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} \in E_3(f)$ et $E_3(f)$ est stable par g donc $g\left(\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right) \in E_3(f)$.

$g\left(\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right) \in E_3(f)$ et $E_3(f) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ donc $g\left(\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$

Donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $g\left(\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right) = y\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$.

On a alors :
$3\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right) = g^3\left(\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right) = y^3\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$.
On en déduit $y = \sqrt[3]{3}$.

$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \in E_{-1}(f)$ et $E_{-1}(f)$ est stable par g donc $g\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \in E_{-1}(f)$.

$g\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \in E_{-1}(f)$ et $E_{-1}(f) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $g\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Donc il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $g\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On a alors :
$-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = g^3\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = z^3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.
On en déduit $z = -2$.
On en déduit, que la matrice dans la base canonique de g est :

$$P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt[3]{3} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}-1/2+1/2\sqrt[3]{3} & 1/2+1/2\sqrt[3]{3} & 0\\ 1/2+1/2\sqrt[3]{3} & -1/2+1/2\sqrt[3]{3} & 0\\ -1/2+1/6\sqrt[3]{3} & 1/2+1/6\sqrt[3]{3} & 0\end{pmatrix}$$

Il y a donc unicité en cas d'existence.
Réciproquement si la matrice de g dans la base canonique est la matrice ci-dessus, alors la matrice de g^3 est :

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

donc $g^3 = f$.

Exercice 4 *(Mines 2019)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = \text{Card}(\text{Sp}(B)) = n$.
Montrer :
$AB = BA \iff A$ et B ont les mêmes vecteurs propres.

Correction
On suppose $AB = BA$.
Soit x un vecteur propre de A.
$\text{Card}(\text{Sp}(A)) = n$ donc les sous-espaces propres de A sont tous de dimension 1.On en déduit que $\mathbb{K}x$ est un sous-espace propre de A.
$AB = BA$ donc $\mathbb{K}x$ est stable par B et x est un vecteur propre de B.
De même si x est vecteur propre de B, il est vecteur propre de A.

On suppose que A et B ont les mêmes vecteurs propres.
$\text{Card}(\text{Sp}(A)) = n$ donc il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A donc aussi de B.
A et B sont simultanément diagonalisable.
Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D_A, D_B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales telles que $A = PD_AP^{-1}$ et $B = PD_BP^{-1}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} AB &= PD_AP{-}1PD_BP^{-1} = PD_AD_BP^{-1} \\ &= PD_BD_AP^{-1} \text{ car les matrices diagonales commutent} \\ &= PD_BP^{-1}PD_AP^{-1} \\ &= BA \end{aligned}$$

Exercice 5 *(Mines 2019)*

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que si M est nilpotente alors les valeurs propres de M sont nulles.
   Quelle est la trace de M ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) Existe-t-il un réel λ tel que $A - \lambda I_3$ soit nilpotente ?
   (b) Trouver les sous-espaces propres de A.
   (c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction

1. Soit λ une valeur propre de M.
   $\exists X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq $MX = \lambda X$
   M est nilpotente donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq $M^p = 0$. X^p annule M donc le spectre de M est contenu dans l'ensemble des racines de X^p : $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0\}$.
   D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$ et ne peut avoir que 0 comme racine donc $\chi_M = X^n$ et 0 est valeur propre de multiplicité n de M.
   On en déduit $\mathrm{tr}\,(M) = n \times 0 = 0$.

2. (a) Si λ existe alors $\mathrm{tr}\,(A - \lambda I_3) = 0$ donc $\lambda = \dfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,(A) = 3$.
   Soit $B = A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   $B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & -4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 8I_3$
   $B^3 = 8I_3$ donc B est inversible et ne peut pas être nilpotente.

   (b) $(A - 3I_3)^3 = 8I_3$ donc si λ est valeur propre de A alors $(\lambda - 3)^3 = 8 = 2^3$.
   On en déduit que $\lambda = 3 + 2 = 5$ ou $3 + 2j = 2 + i\sqrt{3}$ ou $3 - 2j = 2 - i\sqrt{3}$ mais il ne s'agit à ce stade que d'une condition nécessaire.
   Réciproquement, on étudie les systèmes :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_5(A) \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -3x - 5y + 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases}$$

   Donc 5 est valeur propre de A et $E_5(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{2+i\sqrt{3}}(A) \iff \begin{cases} (2 - i\sqrt{3})x + y = 0 \\ -3x - (2 + i\sqrt{3})y + 4z = 0 \\ x - y + (3 - i\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -(2 - i\sqrt{3})x \\ 4x + 4z = 0 \\ (3 - i\sqrt{3})x + (3 - i\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -(2 - i\sqrt{3})x \\ z = -x \end{cases}$$

   Donc $2 + i\sqrt{3}$ est valeur propre de A et $E_{2+i\sqrt{3}}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 - i\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$
   A étant réelle, on en déduit que $2 - i\sqrt{3}$ est valeur propre de A et $E_{2-i\sqrt{3}}(A) =$

$\mathbb{C}\begin{pmatrix}-1\\2+i\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$

(c) Soit $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&2-i\sqrt{3}&2+i\sqrt{3}\\2&1&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&2+i\sqrt{3}&0\\0&0&2-i\sqrt{3}\end{pmatrix}$.
$A=PDP^{-1}$.
On en déduit :
$\forall n\in\mathbb{N}\ A^n=P\begin{pmatrix}5^n&0&0\\0&(2+i\sqrt{3})^n&0\\0&0&(2-i\sqrt{3})^n\end{pmatrix}P^{-1}$.
Il me paraît vain d'aller plus loin.

Exercice 6 *(X 2019)*

1. Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que :
$\forall x\in\mathbb{C}^n\ (x,u(x))$ est liée.
Que dire de u ?
2. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(M)=0$.
Montrer qu'il existe $P\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que tous les coefficients diagonaux de $P^{-1}MP$ soient nuls.
3. Soit $k\in[\![1;n-1]\!]$.
Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension k de $\mathbb{C}^n$.
Que dire de u ?

Correction

1. C'est une question classique que vous avez du voir en PCSI : u est une homothétie.
Le résultat est valable en dimension infinie comme en dimension finie.
Dans le cas de la dimension finie, la démonstration peut se simplifier.
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ (par exemple la base canonique).
Par hypothèse :
$\forall i\in[\![1;n]\!]\ \exists!\lambda_i\in\mathbb{C}$ tq $u(e_i)=\lambda_ie_i$.
(on écrit que $(x,u(x))$ est liée avec $x\neq 0$)
Mais on a aussi pour $i\neq j$:
$\exists!\mu_{i,j}\in\mathbb{C}$ tq $u(e_i+e_j)=\mu_{i,j}(e_i+e_j)$
On en déduit :
$\mu_{i,j}e_i+\mu_{i,j}e_j=u(e_i+e_j)=u(e_i)+u(e_j)=\lambda_ie_i+\lambda_je_j$
La famille $(e_1,\dots,e_n)$ étant libre, $\mu_{i,j}=\lambda_i$ et $\mu_{i,j}=\lambda_j$.
On en déduit $\lambda_i=\lambda_j$ et donc λ_i est indépendant de i :
$\exists\lambda\in\mathbb{C}$ tq $\forall i\in[\![1;n]\!]\ u(e_i)=\lambda e_i$
u et λid coïncident sur une base donc sont égales.
u est bien une homothétie.
2. On raisonne par récurrence sur n.
La propriété est vraie pour $n=1$: la matrice nulle est la seule matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ de trace nulle.
On suppose la propriété vraie au rang n.
Soit $M\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de trace nulle.
Si M est de la forme λI_n alors $M=0$ à cause de sa trace et M est bien semblable à une

matrice de trace nulle.
Si M n'est pas de la forme λI_n, il existe X_1 colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ telle que MX_1 n'est pas colinéaire à X_1 : c'est l'interprétation matricielle de la première question.
(X_1, MX_1) étant libre on peut la compléter en une base de $\mathbb{C}^{n+1}$ (en toute rigueur il faudrait isoler le cas $n = 1$).
On en déduit que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & N \end{pmatrix}$ où $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La trace étant un invariant de similitude, la trace de N est nulle et d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la diagonale de $Q^{-1}NQ$ est nulle.
On pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.
On vérifie facilement (en faisant le produit) que P est inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.
$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & N \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & Q^{-1}NQ \end{pmatrix}$ est une matrice de diagonale nulle semblable à M.

3. On montre par récurrence sur k que u est une homothétie.
D'après la première question, la propriété est vraie au rang 1.
On suppose la propriété vraie au rang $k-1$, $k \in [\![2; n-1]\!]$.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension k de $\mathbb{C}^n$.
Soit F un sev de $\mathbb{C}^n$ de dimension $k-1$.
Soit $(e_1, \dots, e_{k-1})$ une base de F.
On la complète en $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$.
$k \leq n-1$ donc les deux vecteurs e_k et e_{k+1} existent.
Soit $G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1})$.
G et H sont de dimension k donc sont stables par u.
$G \cap H = F$:
il est clair que $F \subset G \cap H$.
Soit $x \in G \cap H$.
x s'écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} x_i e_i + x_k e_k = \sum_{i=1}^{k-1} y_i e_i + y_{k+1} e_{k+1}$.
Par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, $x_k = 0$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} x_i e_i \in F$.
F est stable par u comme intersection de deux sev stables par u.
u stabilise tous les sous-espaces de dimension $k-1$ de $\mathbb{C}^n$.
D'après l'hypothèse de récurrence, u est une homothétie.

Exercice 7 *(Centrale 2018)*

Soit $A = \mathrm{Diag}(1, 2, \dots, n)$.
Soit $g \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(g)$ est l'ensemble des matrices de diagonales nulles.
2. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.
Montrer qu'il existe B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = BC - CB$.

Correction

1. En interprétant le produit par une matrice diagonale en termes d'opérations élémentaires, on a :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ (g(M))_{i,j} = (i-j)m_{i,j}$
Si $i = j$, $(g(M))_{i,j} = 0$ donc la diagonale de $g(M)$ est nulle.
Réciproquement, soit A une matrice de diagonale nulle.
Soit M telle que $m_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{i-j}$ pour $i \neq j$. On choisit arbitrairement les coefficients situés sur la diagonale de M.
$g(M) = A$.
2. On raisonne par récurrence sur n.
La propriété est vraie pour $n = 1$: la matrice nulle est la seule matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ de trace nulle.
On suppose la propriété vraie au rang n.
Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de trace nulle.
Si M est de la forme λI_n alors $M = 0$ à cause de sa trace et M est bien semblable à une matrice de trace nulle.
SI M n'est pas de la forme λI_n, il existe X_1 colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ telle que MX_1 n'est pas colinéaire à X_1 : c'est un exercice classique.
(X_1, MX_1) étant libre on peut la compléter en une base de $\mathbb{C}^{n+1}$ (en toute rigueur il faudrait isoler le cas $n = 1$).
On en déduit que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & N \end{pmatrix}$ où $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La trace étant un invariant de similitude, la trace de N est nulle et d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la diagonale de $Q^{-1}NQ$ est nulle.
On pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.
On vérifie facilement (en faisant le produit) que P est inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.
$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & N \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & Q^{-1}NQ \end{pmatrix}$ est une matrice de diagonale nulle semblable à M.
3. Il existe P inversible telle que $M = PNP^{-1}$ avec N de diagonale nulle.
D'après la première question, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = AB - BA$ avec $A = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$.
$M = P(AB - BA)P^{-1} = FG - GF$ avec $F = PAP^{-1}$ et $G = PBP^{-1}$.

Exercice 8 *(Mines 2022)*

1. Existe-t-il A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?
2. Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle, montrez que A est semblable à une matrice de diagonale nulle (ie dont tous les coefficients diagonaux sont nuls).

Exercice 9 *(X 2018)*

1. Soit $(u_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer que les u_i sont simultanément diagonalisables.
2. Que dire si les u_i sont seulement supposés trigonalisables ?

Correction

1. Dans le programme actuel, on dispose du résultat suivant :
   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
   Soit F un sev de E stable par u et u_F l'endomorphisme de F induit par u.
   Alors u_F est diagonalisable.

   Passons à la question posée.
   On raisonne par récurrence sur p.
   Le résultat est trivial pour $p = 1$.
   On suppose la propriété vraie au rang $p - 1 \geq 1$.
   Soit $(u_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'endomorphismes (sous-entendu d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie) diagonalisables qui commutent deux à deux.
   On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u_1 comptées sans leurs multiplicités.
   Soit $i \in [\![1;p]\!]$.
   Comme les u_j commutent , $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par u_j. On note v_j l'endomorphisme induit.
   D'après le lemme v_j est diagonalisable.
   Il est clair que les v_j commutent deux à deux.
   D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{B}_i$ base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres communs à $v_2, \ldots, v_p$ donc à $u_2, \ldots, u_p$.
   Par construction, elle est formée de vecteurs propres de u_1.
   En recollant ces bases $\mathcal{B}_i$, on obtient une base de E formée de vecteurs propres communs à tous les u_i.
2. On commence par montrer par récurrence sur p que de tels endomorphismes ont un vecteur propre en commun.
   C'est trivial pour $p = 1$.
   On suppose la propriété vraie au rang $p - 1 \geq 1$.
   Soit $(u_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'endomorphismes (sous-entendu d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie) trigonalisables qui commutent deux à deux.
   u_1 est trigonalisable donc possède au moins une valeur propre λ.
   Comme les u_j commutent , $E_\lambda(u_1)$ est stable par u_j. On note v_j l'endomorphisme induit.
   Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $E_\lambda(u_i)$, la matrice de u_j est $U_j = \begin{pmatrix} V_j & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où V_j est la matrice de v_j dans la base de $E_\lambda(u_1)$ formée par les premiers vecteurs de $\mathcal{B}$.
   En calculant un déterminant triangulaire par blocs, on montre que χ_{v_j} divise χ_{u_j} ($\chi_{u_j} = \chi_{v_j}\chi_B$). Mais par hypothèse χ_{u_j} est scindé sur $\mathbb{K}$ (le corps de base de E) donc χ_{v_j} est scindé et v_j est trigonalisable.
   Il est clair que les v_j commutent deux à deux.
   D'après l'hypothèse de récurrence, il existe dans $E_\lambda(u_1)$ un vecteur propre commun à $v_2, \ldots, v_p$.
   C'est un vecteur propre commun à $u_1, \ldots, u_p$.

   On va maintenant montrer que les u_i sont simultanément trigonalisables par récurrence sur la dimension de l'espace.

Pour plus de clarté énonçons soigneusement la propriété à démontrer par récurrence :
$\mathcal{P}(n)$: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $(u_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'endomorphismes de E trigonalisables qui commutent deux à deux.
Alors les u_i sont simultanément trigonalisables.

$\mathcal{P}(1)$ est triviale.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.
Soit $(u_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'endomorphismes de E trigonalisables qui commutent deux à deux.
D'après ce qui précède, il existe e_1 vecteur propre commun à tous les u_i.
On complète (e_1) en $(e_1,\dots,e_{n+1})$ base de E.
$\forall i\in[\![1;p]\!]\ Mat_{(e_1,\dots,e_{n+1})}(u_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & B_i\\ 0 & A_i\end{pmatrix}$.
A_i est la matrice dans la base $(e_2,\dots,e_{n+1})$ de $H=Vect(e_2,\dots,e_{n+1})$ d'un endomorphisme v_i de H.
Plus précisément, si on note q la projection sur H parallèlement à $\mathbb{K}e_1$, $v_i\begin{cases}H\to H\\ x\mapsto q(u_i(x))\end{cases}$.
Comme ci-dessus v_i est trigonalisable.
u_i et u_j commutent donc :
$\begin{pmatrix}\lambda_i & B_i\\ 0 & A_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_j & B_j\\ 0 & A_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_j & B_j\\ 0 & A_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i & B_i\\ 0 & A_i\end{pmatrix}$
Donc :
$\begin{pmatrix}\lambda_i\lambda_j & \lambda_iB_j+B_iA_j\\ 0 & A_iA_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_j\lambda_i & \lambda_jB_i+B_jA_i\\ 0 & A_jA_i\end{pmatrix}$
On en déduit que les blocs A_i commutent deux à deux. Il en est donc de même des endomorphismes v_i.
Par conséquent, il existe une base $(\epsilon_2,\dots,\epsilon_{n+1})$ de H dans laquelle pour tout $i\in[\![1;p]\!]$, v_i a une matrice triangulaire supérieure T_i.
$(e_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_{n+1})$ est une base de E.
Pour la même raison que que pour $(e_1,\dots,e_{n+1})$ (stabilité de la droite $\mathbb{K}e_1$) :
$\forall i\in[\![1;p]\!]\ Mat_{(e_1,\epsilon_2\dots,\epsilon_{n+1})}(u_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & D_i\\ 0 & C_i\end{pmatrix}$.
C_i est la matrice dans la base $(\epsilon_2,\dots,\epsilon_{n+1})$ de $H'=Vect(\epsilon_2,\dots,\epsilon_{n+1})$ d'un endomorphisme w_i de H'.
Plus précisément, si on note q' la projection sur H' parallèlement à $\mathbb{K}e_1$, $w_i\begin{cases}H'\to H'\\ x\mapsto q'(u_i(x))\end{cases}$.
Mais $H'=H$ donc $q'=q$ et $w_i=v_i$.
Donc :
$\forall i\in[\![1;p]\!]\ Mat_{(e_1,\epsilon_2\dots,\epsilon_{n+1})}(u_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & D_i\\ 0 & T_i\end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.