Algèbre linéaire chapitre 5 ICNA 2007

Créé le : **17 nov. 2021**

Date limite : **Pas encore diffusé**

Ce QCM est une adaptation du QCM 2007 de l'ICNA.
Pour chaque question, parmi les 4 premières propositions, 0,1 ou deux sont exactes.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $B = (e_1,\, e_2,\, e_3)$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet $(x,\, y,\, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le triplet $(x,\, -2\,x + 3\,y + z,\, 4\,x - 4\,y - z)$.
id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice unité de l'ensemble, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

1

La matrice M de l'endomorphisme f par rapport à la base B s'écrit :

- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

2

L'endomorphisme f est de rang :

- [ ] inférieur ou égal à 3
- [ ] inférieur ou égal à 2
- [ ] 3 car le rang d'une matrice est égal au nombre de colonnes non nulles
- [ ] 1 car une seule colonne de M a tous ses coefficients non nuls
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

3

La matrice M

- [ ] est symétrique
- [ ] est triangulaire
- [ ] est inversible car l'endomorphisme f, étant de rang 3, est bijectif
- [ ] est inversible car toute matrice de trace non nulle est inversible.
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

4

Le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M

- [ ]

est de degré 3, car de manière générale le degré du polynôme

- [ ] admet 1 pour racine car la somme des coefficients du polynôme est nulle
- [ ] n'est pas divisible par le polynôme X car sinon sa trace serait nulle
- [ ] est égal à $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

5

L'endomorphisme f

- [ ] a pour valeur propre les racines de tout polynôme P tel que $P(f) = 0$
- [ ] ne peut admettre 0 pour valeur propre car f est un automorphisme
- [ ] admet deux valeurs propres 1 et -1
- [ ] admet une valeur propre triple 1
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

6

L'endomorphisme f

- [ ] n'est pas diagonalisable sinon on aurait $f = id$
- [ ] est diagonalisable car f est bijectif
- [ ]

n'est ni diagonalisable ni trigonalisable car χ_f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$

- [ ] n'est pas diagonalisable car $\dim\left(\mathrm{Ker}(f - id)\right) < 3$ mais est trigonalisable car χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$.
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

7

On note $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ les valeurs propres, éventuellement confondues, de l'endomorphisme f
Proposition 2 : pour tout i entier entre 1 et 3, tout vecteur v_i de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(v_i) = \lambda_i\, v_i$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i

- [ ] le sous-espace $\mathrm{Ker}(f)$ admet pour base $(0,\ 1,\ -2)$
- [ ] La proposition 2 est vraie.
- [ ] $E_{-1}(f)$ est le plan d'équation $-2\,x + 2\,y + z = 0$
- [ ] $E_{+1}(f)$ est le plan d'équation $-2\,x + 2\,y + z = 0$
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

8

On suppose qu'il existe une base $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f est égale à

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- [ ] $(u_1,\ u_2)$ est une base du sous-espace $E_1(f)$
- [ ] $f - id \text{ est de rang } 2$

- [ ] $\mathrm{Im}(f - id) = \mathbb{R}\, u_2$
- [ ] le plus petit entier k tel que $(f - id)^k = 0$ est égal à 3.
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

9

- [ ] On déduit de la matrice $M - I$ que l'on peut prendre $u_2 = -2\, e_1 + 2\, e_2 + e_3$
- [ ] On déduit de la matrice $M - I$ que l'on peut prendre $u_2 = e_2 - 2\, e_3$
- [ ] la famille $(u_1,\, u_2) = (e_1, -2\, e_1 + 2\, e_2 + e_3)$ est une base de $E_1(f)$
- [ ] la famille $(u_1,\, u_2) = (e_1 + e_2, e_2 - 2\, e_3)$ est une base $E_1(f)$.
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

10

On pose $u_3 = a\, e_1 + b\, e_2 + c\, e_3$ où $a,\ b,\ c$ sont des réels, et on considère les vecteurs u_1 et u_2 définis dans la question 9. On note δ le déterminant du système de vecteurs $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ dans la base B.

- [ ] $\delta = 2\, c - b$
- [ ] $\delta = c - 2\, b + 2\, a$
- [ ] $\delta = 2\, c - 3\, a + 3\, b$
- [ ] $\delta = c + 2\, b + 2\, a$
- [ ]

Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

11

Pour que la famille $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ considérée à la question 10 soit une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à N

- [ ] il faut et il suffit que $c + 2\,b - 2\,a$ soit non nul
- [ ] il faut et il suffit que $c + 2\,b - 2\,a = 1$ et que $c + 2\,b + 2\,a$ soit non nul
- [ ] il suffit de choisir $(a,\ b,\ c) = (0,\ 1,\ 0)$
- [ ] il suffit de choisir $(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 1)$
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

12

Proposition 1 : les matrices M et N ne peuvent être semblables car il n'existe pas de famille $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ constituant une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à N

- [ ] La proposition 1 est vraie
- [ ] M et N sont semblables car elles ont le même rang
- [ ] $M = P^{-1}\,N\,P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $N = P^{-1}\,M\,P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

13

On a

- [ ] $(M-I)^2=0$ car $(M-I)$ et $(N-I)$ sont semblables et $(N-I)^2=0$
- [ ] $(M-I)^3=0$ et $(M-I)^2$ est non nulle
- [ ] la formule du binôme s'applique au calcul de $(A+B)^n$ pour toute matrice A et B
- [ ] pour appliquer la formule du binôme au calcul de $(A+B)^n$ il faut que $AB=BA$
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1

14

On obtient :

- [ ] $M^n=I+2^n(M-I)$ pour tout entier naturel n
- [ ] $M^n=I+(n/2)(M-I)$ pour tout entier naturel n
- [ ] la suite (M^n/n) converge vers $(M-I)$
- [ ] la suite (M^n/n) converge vers $(M-I)/2$
- [ ] Aucune des quatre propositions précédentes n'est vraie.

Sélectionnez au moins une bonne réponse.

Coef. 1