Algèbre linéaire
Chapitre 5
Correction du QCM

941

Ce QCM est une adaptation du QCM 2007 de l'ICNA.
Pour chaque question, parmi les 4 premières propositions, 0,1 ou deux sont exactes.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $B = (e_1,\, e_2,\, e_3)$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet $(x,\, y,\, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le triplet $(x,\, -2\,x + 3\,y + z,\, 4\,x - 4\,y - z)$.
id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice unité de l'ensemble, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Question 1 La matrice M de l'endomorphisme f par rapport à la base B s'écrit :

— $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

— $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

— $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

— $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

On a :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x+3y+z \\ 4x-4y-z \end{pmatrix}$$

C'est donc la troisième proposition qui est vraie.

Question 2 L'endomorphisme f est de rang :

— inférieur ou égal à 3

— inférieur ou égal à 2

— 3 car le rang d'une matrice est égal au nombre de colonnes non nulles de cette matrice

— 1 car une seule colonne de M a tous ses coefficients non nuls

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— La première proposition est vraie : le rang d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inférieur ou égal à la dimension de cet espace.

—

$$\det(f) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

f est donc un automorphisme de E et son rang vaut 3 : la deuxième proposition est fausse.

— Le rang de f est bien égal à 3, mais en général le rang d'une matrice carrée n'est pas égal au nombre de colonnes non nulles : la troisième proposition est fausse.

— La quatrième proposition est grossièrement fausse.

Question 3 La matrice M

— est symétrique

— est triangulaire

— est inversible car l'endomorphisme f, étant de rang 3, est bijectif

— est inversible car toute matrice de trace non nulle est inversible.

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

— M n'est clairement pas symétrique.

— M n'est pas triangulaire. Néanmoins, elle est triangulaire inférieure par blocs.

— f étant un endomorphisme de rang 3 d'un espace vectoriel de dimension 3 est bijectif et sa matrice dans toute base est inversible.

La troisième proposition est vraie.

— Une matrice de trace non nulle peut ne pas être inversible : cf $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

C'est avec le déterminant que la propriété serait vraie.

Question 4 Le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M

— est de degré 3, car de manière générale, le degré du polynôme caractéristique est égal au rang de l'endomorphisme auquel il est associé

— admet 1 pour racine car la somme des coefficients du polynôme est nulle

— n'est pas divisible par le polynôme X car sinon sa trace serait nulle

— est égal à $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— χ_M est bien de degré 3 : le degré du polynôme caractéristique d'une matrice carrée est égal à son nombre de lignes (ou de colonnes), indépendamment du rang de cette matrice : la première proposition est fausse.

— Cette question nécessite le calcul du polynôme caractéristique de M.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ \chi_M(x) &= \det(xI_3 - M) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 2 & x-3 & -1 \\ -4 & 4 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\left((x-3)(x+1)-4\right) = (x-1)(x^2-2x+1)
\end{aligned}$$

Donc $\chi_M = (X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.
La deuxième proposition est vraie

— Pour une matrice M de taille quelconque :

$$\begin{aligned}
X \text{ divise } \chi_M &\iff \chi_M(0) = 0 \\
&\iff \det(-M) = 0 \\
&\iff (-1)^n \det(M) = 0 \\
&\iff \det(M) = 0
\end{aligned}$$

ce qui n'a pas de rapport avec la trace : la troisième proposition est fausse.

— La quatrième proposition est vraie.

Question 5 L'endomorphisme f

— a pour valeur propre les racines de tout polynôme P tel que $P(f) = 0$

— ne peut admettre 0 pour valeur propre car f est un automorphisme

— admet 2 valeurs propres -1 et $+1$

— admet une valeur propre triple 1.

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— Soit P un polynôme tel que $P(f) = 0$.
Si λ est valeur propre de f alors $P(\lambda) = 0$ mais la réciproque est fausse.
La première proposition est fausse.

— f est un automorphisme donc $f - 0id$ est bijective donc $f - 0id$ est injective et 0 n'est pas valeur propre de f.
La deuxième proposition est vraie.

— On a vu dans la question précédente que $\chi_f = (X-1)^3$ donc la troisième proposition est fausse et la quatrième proposition est vraie.

Question 6 L'endomorphisme f

— n'est pas diagonalisable sinon on aurait $f = id$

— est diagonalisable car f est bijectif

— n'est ni diagonalisable ni trigonalisable car son polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$

— n'est pas diagonalisable car $\dim(\mathrm{Ker}(f - id)) < 3$ mais est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— 1 étant la seule valeur propre de f, si f est diagonalisable alors $f = id$, ce qui n'est pas.
La première proposition est vraie

— Un endomorphisme bijectif n'a aucune raison d'être diagonalisable : la deuxième proposition est fausse.
— $\chi_f = (X-1)^3$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
— On a déjà vu que f n'était pas diagonalisable car $f \neq id$ ce qui revient à dire que le noyau de $f - id$ est de dimension strictement inférieure à 3. De plus χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$ donc f est trigonalisable. La quatrième proposition est vraie.

Question 7 On note λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs propres, éventuellement confondues, de l'endomorphisme f

— le sous-espace $\mathrm{Ker}(f)$ admet pour base $(0,\, 1,\, -2)$
— pour tout i entier entre 1 et 3, tout vecteur v_i de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(v_i) = \lambda_i\, v_i$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i
— le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est le plan d'équation $-2\,x + 2\,y + z = 0$
— le sous-espace propre associé à la valeur propre $+1$ est le plan d'équation $-2\,x + 2\,y + z = 1$
— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— f étant bijective, son noyau est réduit au vecteur nul : la première proposition est fausse.
— Le vecteur nul vérifie $f(v_i) = \lambda_i v_i$ mais n'est pas vecteur propre de f : la deuxième proposition est fausse.
— -1 n'est pas valeur propre de f donc la troisième proposition est fausse.
— $M - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ donc le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1 est bien le plan d'équation $-2x + 2y + 1 = 0$ (la troisième ligne est colinéaire à la première).La quatrième proposition est vraie

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 8 On suppose qu'il existe une base $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f est égale à N

— la famille $(u_1,\, u_2)$ est une base du sous-espace $\mathrm{Ker}(f - id)$
— l'endomorphisme $f - id$ est de rang 2
— $\mathrm{Im}\,(f - id) = \mathbb{R}\, u_2$
— le plus petit entier k tel que $(f - id)^k = 0$ est égal à 3.
— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— $N - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il suffit d'écrire le système pour voir que la famille $(u_1,\, u_2)$ est une base du sous-espace $\mathrm{Ker}(f - id)$. La première proposition est vraie.
— D'après ce qui précède, $\mathrm{Ker}(f - id)$ est de dimension 2 donc $f - id$ est de rang 1 : la deuxième proposition est fausse.

- $\mathrm{Im}\,(f-id) = \mathrm{Vect}((f-id)(u_1),(f-id)(u_2),(f-id)(u_3)) = \mathrm{Vect}(0,0,u_2)$ au vu de la matrice $N-I$ donc la troisième proposition est vraie
- $(N-I)^2 = 0$ donc la quatrième proposition est fausse.

Question 9 — On déduit de l'expression de la matrice $M-I$ que l'on peut prendre $u_2 = -2\,e_1 + 2\,e_2 + e_3$
- On déduit de l'expression de la matrice $M-I$ que l'on peut prendre $u_2 = e_2 - 2\,e_3$
- la famille $(u_1,\, u_2) = (e_1, -2\,e_1 + 2\,e_2 + e_3)$ est une base du sous-espace propre associé à 1
- la famille $(u_1,\, u_2) = (e_1 + e_2, e_2 - 2\,e_3)$ est une base du sous-espace propre associé à 1.
- Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction
- $M - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

  On en déduit que l'image de $f - id$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $-2e_2 + 4e_3 = -2(e_2 - 2e_3)$, $2e_2 - 4e_2 = 1(e_2 - 2e_3)$, $e_2 - 2e_3$ donc la droite engendrée par $e_2 - 2e_3$.

  Il résulte alors de la question précédente :

  La première proposition est fausse.
- La deuxième proposition est vraie
- On a déjà vu que le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation $-2x + 2y + 1 = 0$ dans la base (e_1, e_2, e_3).

  Par conséquent e_1 n'appartient pas à cet espace et la troisième proposition est fausse.
- $e_1 + e_2$ et $e_2 - 2e_3$ vérifient l'équation du plan et ne sont pas colinéaires donc ils forment une base du plan.

  La quatrième proposition est vraie.

Question 10 On pose $u_3 = a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3$ où a, b, c sont des réels, et on considère les vecteurs u_1 et u_2 définis dans la question 9. On note δ le déterminant du système de vecteurs $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ dans la base B.
- $\delta = 2\,c - b$
- $\delta = c - 2\,b + 2\,a$
- $\delta = 2\,c - 3\,a + 3\,b$
- $\delta = c + 2\,b + 2\,a$
- Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction
- $$\begin{aligned} \delta &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & -2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & -2 & c \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & b-a \\ -2 & c \end{vmatrix} = c + 2b - 2a \end{aligned}$$

  donc la première proposition est fausse.
- la seconde proposition est fausse.
- la troisième proposition est fausse.
- la quatrième proposition est fausse.
- C'est la dernière possibilité qui est la bonne.

Question 11 Pour que la famille $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ considérée à la question 10 soit une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à N

— il faut et il suffit que $c + 2\,b - 2\,a$ soit non nul

— il faut et il suffit que $c + 2\,b - 2\,a = 1$ et que $c + 2\,b + 2\,a$ soit non nul

— il suffit de choisir $(a,\, b,\, c) = (0,\, 1,\, 0)$

— il suffit de choisir $(a,\, b,\, c) = (1,\, 1,\, 1)$.

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— Il résulte de la question précédente que $c + 2b - 2a \neq 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que (u_1, u_2, u_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Mais quelle est la matrice de u dans cette base ?

$(u_1,\, u_2) = (e_1 + e_2, e_2 - 2\,e_3)$ est une base du sous-espace propre associé à 1 donc $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$.

$$\begin{aligned} f(u_3) - u_3 &= (-2a + 2b + c)e_2 + (4a - 4b - 2c)e_3 \text{ cf la matrice } M - I \\ &= (-2a + 2b + c)(e_2 - 2e_3) \end{aligned}$$

donc $f(u_3) - u_3$ n'est pas forcément égal à u_2 et la première proposition est fausse.

La CNS pour que la famille $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ considérée à la question 10 soit une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à N est donc $c + 2b - 2a = 1$.

On en déduit que :

— La seconde proposition est fausse.

— $c + 2b - 2a \neq 1$ donc la troisième proposition est fausse.

— $c + 2b - 2a = 1$ donc la quatrième proposition est vraie.

Question 12 — les matrices M et N ne peuvent être semblables car il n'existe pas de famille $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ constituant une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à N

— les matrices M et N sont semblables car deux matrices de même rang sont nécessairement semblables

— $M = P^{-1}\, N\, P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

— $N = P^{-1}\, M\, P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— D'après la question précédente, la première proposition est fausse.

— la seconde proposition est fausse : deux matrices de même rang ne sont pas forcément semblables.

— Il résulte de la question précédente et des formules de changement de base que $M = PNP^{-1}$ donc la troisième proposition est fausse et :

— la quatrième proposition est vraie.

Question 13 On a :

— $(M - I)^2 = 0$ car les matrices $(M - I)$ et $(N - I)$ sont semblables et $(N - I)^2 = 0$

— $(M - I)^3 = 0$ et $(M - I)^2$ est non nulle

— la formule du binôme s'applique au calcul de $(A + B)^n$ pour toute matrice A et B

— pour appliquer la formule du binôme au calcul de $(A + B)^n$ il faut que les matrices A et B commutent.

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— $M - I = PNP^{-1} - PIP^{-1} = P(N-I)P^{-1}$: $M - I$ et $N - I$ sont semblables.
$(M-I)^2 = P(N-I)^2P^{-1} = P0P^{-1} = 0$
La première proposition est vraie
On en déduit :

— La deuxième proposition est fausse.

— La troisième proposition est fausse : c'est du cours.

— La quatrième proposition est vraie
Il a été vu en Sup que si A et B commutent alors on peut appliquer la formule du binôme : "A et B commutent" est donc une condition suffisante.
Mais elle est aussi nécessaire puisqu'on doit avoir $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + B^2 + AB + BA$.

Question 14 On obtient :

— $M^n = I + 2^n(M-I)$ pour tout entier naturel n

— $M^n = I + (n/2)(M-I)$ pour tout entier naturel n

— la suite de terme général M^n/n, pour n entier strictement positif, a pour limite $(M-I)$ lorsque n tend vers $+\infty$

— la suite de terme général M^n/n, pour n entier strictement positif, a pour limite $(M-I)/2$ lorsque n tend vers $+\infty$

— Aucune des 4 propositions précédentes n'est vraie.

Correction

— $M = I + (M-I)$ avec I et $M - I$ qui commutent donc :
$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}(M-I)^k = I + n(M-I)$ car $(M-I)^2 = 0$
La première proposition est fausse.

— La deuxième proposition est fausse.

— La troisième proposition est vraie $\frac{M^n}{n} = \frac{I}{n} + M - I$

— La quatrième proposition est fausse.