Correction du QCM

941

Ce QCM est une adaptation de la première partie du QCM de l'ICNA en 2011.
Pour chaque question, parmi les 4 premières propositions, 0,1 ou deux sont exactes.
r désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $[\![1;r]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et r, enfin $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre r à coefficients réels. I_r, est la matrice unité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$ est à diagonale strictement dominante si et seulement si pour tout i appartenant à $[\![1;r]\!]$, $|m_{i,i}| > \sum\limits_{i \neq j} |m_{i,j}|$.
Une matrice A de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$ est dite stochastique si elle vérifie les deux conditions :

- pour tout couple (i,j) d'entiers de $[\![1;r]\!]$, $a_{i,j}$ appartient à l'intervalle $[0,1]$.
- pour tout entier naturel i de $[\![1;r]\!]$, la somme de tous les coefficients de la ligne i est égale à 1.

Si, de plus, les coefficients de A sont tous non nuls, la matrice est dite stochastique stricte.
On note $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_r^*$ celui des matrices stochastiques strictes.
On note, pour tout n entier naturel non nul, $a_{i,j}^{(n)}$ les coefficients de la matrice A^n.
On dira que la suite de terme général la matrice A^n converge et a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, la matrice A^∞ de coefficients $a_{i,j}^\infty$ si pour tout couple i,j d'entiers de $[\![1;r]\!]$, la suite $\left(a_{i,j}^{(n)}\right)$ est convergente et a pour limite, quand n tend vers $+\infty$, le réel $a_{i,j}^\infty$.

1. L'ensemble $\mathcal{S}_2$:
   - est stable pour l'addition des matrices
   - est stable pour le produit matriciel
   - est stable pour la multiplication par un scalaire réel
   - n'est pas stable pour la produit matriciel
   - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

   Correction
   - La première proposition est fausse :
     $I_2 \in \mathcal{S}_2$ mais $A = I_2 + I_2 \notin \mathcal{S}_2$: $a_{1,1} = 2 \notin [0;1]$
   - La seconde proposition est vraie :
     Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{S}_2$.
     $C = AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$.
     Les coefficients de A et de B étant positifs, ceux de C le sont clairement.
     Par contre, il n'est pas évident qu'ils soient inférieurs à 1.
     Mais cette condition est superflue : elle découle des deux autres :
     Si $x + y = 1$ avec x et $y \geq 0$ alors x et y sont inférieurs à 1.
     Sur la première ligne de C :

$ae + bg + af + bh = a(e + f) + b(g + h) = a + b = 1$
et sur la deuxième ligne :
$ce + dg + cf + dh = c(e + f) + d(g + h) = c + d = 1$

- La troisième proposition est fausse : cf $2I_2$
- La quatrième proposition est fausse : cf la deuxième.

2. Dans toute la suite, A est la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   La matrice A :
   - appartient à $\mathcal{S}_2^*$
   - n'appartient pas à $\mathcal{S}_2$
   - vérifie $A^2 = \frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2$
   - vérifie $A^2 = \frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I_2$
   - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

   Correction
   - La première proposition est vraie : vérifications faciles.
   - La seconde proposition est fausse : $A \in \mathcal{S}_2^* \subset \mathcal{S}_2$.
   - La troisième proposition est vraie :
     $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2$
     On peut aussi invoquer le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det\,(A) = X^2 - \frac{5}{6}X - \frac{1}{6}$ annule A.
   - La quatrième proposition est fausse à cause de la troisième et de la liberté de la famille (I_2, A).

3. - Il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nA + b_nI_2$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{5}{6}b_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n$
   - Il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nA + b_nI_2$ et $a_{n+1} = b_n + \frac{5}{6}a_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n$
   - Il existe une suite de réels (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nA$
   - Il existe plusieurs suites de réels (a_n) et plusieurs suites de réels (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nA + b_nI_2$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{5}{6}b_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n$
   - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

   Correction
   Comme remarqué dans la question précédente, la famille (I_2, A) est libre.
   Par conséquent, La quatrième proposition est fausse.
   $A^0 = I_2 = a_0A + b_0I_2$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ uniques.
   On ne peut donc pas avoir $A^0 = \alpha_0A = \alpha_0A + 0I_2$.
   Par conséquent, La troisième proposition est fausse.
   $A^1 = A = a_1A + b_1I_2$ avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
   $a_1 \neq a_0 + \frac{5}{6}b_0$ donc :
   La première proposition est fausse.
   Par contre $a_1 = b_0 + \frac{5}{6}a_0$ et $b_1 = \frac{1}{6}a_0$.

Si $A^n = a_n A + b_n I_2$ alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A(a_n A + b_n I_2) = a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n \left(\frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2\right) + b_n A = \left(\frac{5}{6}a_n + b_n\right) A + \frac{1}{6}a_n I_2 \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tq $A^n = a_n A + b_n I_2$
avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n \end{cases}$$

La seconde proposition est vraie.

4. Si il existe des suites de réels (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n I_2$ alors
   - La suite $(a_n + b_n)$ est constante de valeur 1.
   - La suite $(a_n + b_n)$ n'est pas constante.
   - Les suites (a_n) et (b_n) vérifient pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{1 - a_n}{6}$ et $b_{n+1} = 1 - \frac{b_n}{6}$.
   - Les suites (a_n) et (b_n) vérifient pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{6}$ et $b_{n+1} = \frac{1 - b_n}{6}$.
   - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

   Correction
   Au vu de la question précédente, les suites (a_n) et (b_n) existent et sont uniques. Elles vérifient donc les relations de récurrence de la question précédente et :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} + b_{n+1} &= \frac{5}{6}a_n + b_n + \frac{1}{6}a_n \\ &= a_n + b_n \end{aligned}$$

   La suite $(a_n + b_n)$ est donc constante de valeur $a_0 + b_0 = 1$.
   La première proposition est vraie.
   On en déduit immédiatement : La seconde proposition est fausse.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} &= \frac{5}{6}a_n + b_n = a_n + b_n - \frac{1}{6}a_n \\ &= 1 - \frac{a_n}{6} \\ b_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n = \frac{1}{6}(a_n + b_n - b_n) \\ &= \frac{1 - b_n}{6} \end{aligned}$$

   La quatrième proposition est vraie.
   La troisième proposition est fausse. : $b_1 = 0$ et $1 - \frac{b_0}{6} = \frac{5}{6}$.

5. Reprenant les notations et les hypothèses de la question 4 ,
   - Il n'existe pas de réel l tel que la suite $(a_n - l)$ soit une suite géométrique.

- on peut établir l'existence d'un réel l tel que la suite (a_n+l) soit une suite géométrique convergente de raison $\frac{1}{6}$.
- pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{1}{7}\left(1-\left(\frac{-1}{6}\right)^{n-1}\right)$ et $b_n = \frac{1}{7}\left(6+\left(\frac{-1}{6}\right)^{n-1}\right)$
- pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{1}{7}\left(1-\left(\frac{-1}{6}\right)^{n-1}\right)$ et $a_n = \frac{1}{7}\left(6+\left(\frac{-1}{6}\right)^{n-1}\right)$
- aucune des propositions précédentes n'est vraie.

Correction

Il s'agit d'étudier deux suites arithmético-géométriques :

$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{6}$

$l = 1 - \frac{l}{6} \iff l = \frac{6}{7}$

On a en faisant la différence :

$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} - \frac{6}{7} = -\frac{1}{6}\left(a_n - \frac{6}{7}\right)$

On en déduit que La première proposition est fausse.

La suite $(a_n+\lambda)$ avec $\lambda = -l = -\frac{6}{7}$ est une suite géométrique donc le statut de la deuxième proposition n'est pas immédiat.

Si il existe l' telle que la suite (a_n+l') soit géométrique de raison $\frac{1}{6} \in]-1;1[$ alors (a_n+l') converge vers 0 donc a_n converge vers $-l'$.

Mais le calcul ci-dessus montre que a_n converge vers $\frac{6}{7}$.

On en déduit que $l' = -\frac{6}{7}$ et que la suite $\left(a_n - \frac{6}{7}\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et $-\frac{1}{6}$.

Ce n'est possible que si c'est la suite nulle, ce qui n'est pas donc : La seconde proposition est fausse.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\ a_n &= \frac{6}{7} + \left(\frac{-1}{6}\right)^n \left(a_0 - \frac{6}{7}\right)\\
&= \frac{6}{7} + \left(\frac{-1}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{7}\\
&= \frac{1}{7}\left(6+\left(\frac{-1}{6}\right)^{n-1}\right)\\
b_n &= 1 - a_n\\
&= \frac{1}{7}\left(1-\left(\frac{-1}{6}\right)^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

La quatrième proposition est vraie.

La troisième proposition est fausse. : $a_0 = 0$ et $\frac{1}{7}\left(1-\left(-\frac{-1}{6}\right)^{0-1}\right) = 1$

6. Toujours sous les hypothèses et les notations de la question 4
   - On ne peut pas conclure à la convergence de la suite de terme général A^n.
   - La suite de terme général A^n converge et sa limite appartient au complémentaire de $\mathcal{S}_2^*$ dans $\mathcal{S}_2$.
   - La suite de terme général A^n converge vers une matrice de $\mathcal{S}_2^*$.
   - Les coefficients $a_{i,j}^\infty$ de la limite de la suite de terme général A^n vérifient $a_{1,1}^\infty = a_{2,1}^\infty = \frac{3}{7}$

et $a_{1,2}^{\infty} = a_{2,2}^{\infty} = \dfrac{4}{7}$

- aucune des propositions précédentes n'est vraie.

Correction

$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{6}{7}$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{7}$

Donc $A^n = a_n A + b_n I_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{6}{7}A + \dfrac{1}{7}I_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

On en déduit :

- La première proposition est fausse.
- La deuxième proposition est fausse.
- La troisième proposition est vraie.
- La quatrième proposition est vraie.

Remarque

Les 5/2 pourront observer que

- $\mathcal{S}_r$ est un fermé de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$: application directe de la caractérisation des fermés
- $\mathcal{S}_r^*$ n'est pas un fermé de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$: cf $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_r^*$ est un fermé de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$: c'est plus difficile car chaque matrice de la suite a au moins un coefficient nul mais sa place dépend de la matrice. Il faut donc utiliser le principe des tiroirs et une extraction.

On note B la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

On note $\chi_B = \det(\lambda I_3 - B)$ le polynôme caractéristique de la matrice B.

7. La matrice B
   - est diagonalisable comme matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous distincts.
   - est diagonalisable car une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
   - appartient à $\mathcal{S}_3$ et a pour polynôme caractéristique :
     $\chi_B(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda - \dfrac{5}{21}\right)\left(\lambda - \dfrac{4}{9}\right)$
     en développant par rapport à la dernière colonne.
   - est diagonalisable car il existe un polynôme annulateur de la matrice B scindé à racines simples
   - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

   Correction

   - B n'est clairement pas une matrice triangulaire supérieure.
   - Cette proposition est fausse, cela a été vu en cours.
     χ_B scindé à racines simples est une condition suffisante pour que B soit diagonalisable mais ce n'est pas une condition nécessaire.
   - On vérifie facilement que B appartient à $\mathcal{S}_3$.
     On calcule son polynôme caractéristique en développant par rapport à la dernière

colonne :

$$\begin{aligned}
\forall\lambda\in\mathbb{K}\ \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{3}{7} & \lambda-\frac{4}{7} & 0 \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \lambda-\frac{4}{9} \end{vmatrix} \\
&= \left(\lambda-\frac{4}{9}\right)\begin{vmatrix} \lambda-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{7} & \lambda-\frac{4}{7} \end{vmatrix} \\
&= \left(\lambda-\frac{4}{9}\right)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{3} \\ \lambda-1 & \lambda-\frac{4}{7} \end{vmatrix} \ C_1 \leftarrow C_1+C_2 \\
&= (\lambda-1)\left(\lambda-\frac{4}{9}\right)\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \lambda-\frac{4}{7} \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\left(\lambda-\frac{4}{9}\right)\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \lambda-\frac{5}{21} \end{vmatrix} \ L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\
&= (\lambda-1)\left(\lambda-\frac{4}{9}\right)\left(\lambda-\frac{5}{21}\right)
\end{aligned}$$

La troisième proposition est donc correcte.

- D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_B est un polynôme annulateur de la matrice B.
  D'après ce qui précède, χ_B est scindé à racines simples.
  D'après le cours, si une matrice a un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable.
  La quatrième proposition est donc correcte.

On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de B telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et on considère la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

8. Le sous-espace propre de B
   - associé à la valeur propre λ_1 est la droite vectorielle dont une base est le vecteur $(1,1,1)$.
   - associé à la valeur propre λ_2 est la droite vectorielle dont une base est le vecteur $(0,1,0)$.
   - associé à la valeur propre λ_3 est la droite vectorielle dont une base est le vecteur $(7,-9,7)$.
   - associé à la valeur propre λ_1 est la droite vectorielle dont une base est le vecteur $(1,-1,1)$.
   - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

   Correction
   D'après la question précédente, $\chi_B = (\lambda-1)\left(\lambda-\frac{4}{9}\right)\left(\lambda-\frac{5}{21}\right)$ donc $\lambda_1 = \frac{5}{21}$, $\lambda_2 = \frac{4}{9}$ et $\lambda_3 = 1$.

Les trois valeurs propres de B étant simples, les trois sous-espaces propres associés sont des droites. Il suffit donc d'exhiber un vecteur propre (donc nul) pour une valeur propre de B pour avoir une base du sous-espace propre associé.

- $B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre de B associé à la valeur propre $\lambda_3 = 1$. Ce n'est donc pas une base du sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ_1.
- $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{4}{7}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de B.
- $B\begin{pmatrix}7\\-9\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{15}{7}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix} = \frac{5}{21}\begin{pmatrix}7\\-9\\7\end{pmatrix}$ donc $\left(\begin{pmatrix}7\\-9\\7\end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre de B associé à la valeur propre $\lambda_1 = \frac{5}{21}$. Ce n'est donc pas une base du sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ_3.
- $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{7}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de B.

Finalement aucune des 4 premières propositions n'est vraie.

9. On montre que
   - il existe plusieurs matrices P telles que $B = PDP^{-1}$ et $P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-16 & 0 & 16\\9 & 7 & 0\end{pmatrix}$
   - il existe une matrice P telle que $B = PDP^{-1}$ et $P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-16 & 0 & 16\\9 & 7 & 0\end{pmatrix}$
   - il existe une matrice P telle que $B = P^{-1}DP$ et $P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-16 & 0 & 16\\9 & 7 & 0\end{pmatrix}$
   - il existe une seule matrice $P = \begin{pmatrix}7 & 0 & 1\\-9 & 0 & -1\\7 & 1 & 1\end{pmatrix}$ telle que $B = PDP^{-1}$.
   - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

   Correction
   - Il ne peut pas y avoir plusieurs matrices ayant la même inverse donc cette proposition est fausse.
   - Au vu de la dernière colonne de B, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\lambda_2 = \frac{4}{9}$.

Compte tenu des remarques et des calculs de la question précédente, on en déduit $B = QDQ^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule alors :

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -16 & 0 & 16 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice de l'énoncé est Q^{-1}.

La deuxième proposition est donc correcte.

- On ne peut pas dire que la troisième est fausse car la deuxième est vraie.
  Par contre si la troisième est vraie, les colonnes de la matrice de l'énoncé sont propres pour B. On a vu que ce n'était pas le cas de la troisième donc cette proposition est fausse.
- La quatrième proposition est fausse pour les mêmes raisons : on sait que la troisième colonne de la matrice P de l'énoncé n'est pas un vecteur propre pour B.

10. La suite de terme général B^n
    - est définie par $B^n = \dfrac{1}{16} \begin{pmatrix} 7\left(\frac{5}{21}\right)^n + 9 & 7\left(-\left(\frac{5}{21}\right)^n + 1\right) & 0 \\ 9\left(-\left(\frac{5}{21}\right)^n + 1\right) & 9\left(\frac{5}{21}\right)^n + 7 & 0 \\ 7\left(\frac{5}{21}\right)^n + 9 - 16\left(\frac{4}{9}\right)^n & 7\left(-\left(\frac{5}{21}\right)^n + 1\right) & 16\left(\frac{4}{9}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier n naturel non nul.
    - est définie par $B^n = \dfrac{1}{16} \begin{pmatrix} 7\left(\frac{5}{21}\right)^n + 9 & 7\left(-\left(\frac{5}{21}\right)^n + 1\right) & 0 \\ 9\left(-\left(\frac{5}{21}\right)^n + 1\right) & 9\left(\frac{5}{21}\right)^n + 7 & 0 \\ 7\left(\frac{5}{21}\right)^n + 9 - 16\left(\frac{4}{9}\right)^n & 7\left(\left(\frac{5}{21}\right)^n + 1\right) & 16\left(\frac{4}{9}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier n naturel non nul.
    - converge vers une matrice de $\mathcal{S}_3^*$ car les suites géométriques $\left(\left(\frac{5}{21}\right)^n\right)$ et $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$ convergent vers 0.
    - est une suite d'éléments de $\mathcal{S}_3$, convergente et de limite la matrice $\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$
    - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

Correction

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}\ B^n &= QD^nQ^{-1}\\
&= \frac{1}{16}\begin{pmatrix}7&0&1\\-9&0&1\\7&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{5}{21}\right)^n&0&0\\0&\left(\frac{4}{9}\right)^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-16&0&16\\9&7&0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{16}\begin{pmatrix}7\left(\frac{5}{21}\right)^n&0&1\\-9\left(\frac{5}{21}\right)^n&0&1\\7\left(\frac{5}{21}\right)^n&\left(\frac{4}{9}\right)^n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-16&0&16\\9&7&0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{16}\begin{pmatrix}7\left(\frac{5}{21}\right)^n+9&7\left(-\left(\frac{5}{21}\right)^n+1\right)&0\\9\left(-\left(\frac{5}{21}\right)^n+1\right)&9\left(\frac{5}{21}\right)^n+7&0\\7\left(\frac{5}{21}\right)^n+9-16\left(\frac{4}{9}\right)^n&7\left(-\left(\frac{5}{21}\right)^n+1\right)&16\left(\frac{4}{9}\right)^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que la première proposition est vraie.
La seconde est fausse : cf le coefficient à l'intersection de la troisième ligne et de la deuxième colonne.
De l'expression de B^n ci-dessus, on déduit facilement que (B^n) converge vers la matrice $\frac{1}{16}\begin{pmatrix}9&7&0\\9&7&0\\9&7&0\end{pmatrix}$.
Comme elle a un coefficient nul, on en déduit que la troisième proposition est fausse.
Enfin la quatrième est vraie. On vient de voir ce qu'il en était de la convergence. On peut vérifier sur son expression que B^n appartient à $\mathcal{S}_3$.
Seul le signe de $7\left(\frac{5}{21}\right)^n+9-16\left(\frac{4}{9}\right)^n$ est délicat.

$$\begin{aligned}
\forall n\geq 1\ 7\left(\frac{5}{21}\right)^n+9-16\left(\frac{4}{9}\right)^n &\geq 9-16\left(\frac{4}{9}\right)^n\\
&\geq 9-16\frac{4}{9}=\frac{17}{9}
\end{aligned}$$

On peut aussi dire que le produit de deux matrices à coefficients positifs est une matrice à coefficients positifs : il suffit d'écrire les formules du produit matriciel.
On en déduit alors par récurrence que toutes les matrices B^n sont à coefficients positifs.

On considère les matrices C et $J\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$ et

$J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

11. La matrice C

- est triangulaire inférieure et inversible car ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- admet une valeur propre double $\frac{1}{2}$ et une valeur propre simple 1 donc n'est pas diagonalisable car pour qu'une matrice soit diagonalisable, il est nécessaire que toutes ses valeurs propres soient de multiplicité 1.
- est diagonalisable car toute matrice dont le spectre ne contient pas la valeur propre 0 est diagonalisable.
- est diagonalisable car le polynôme $(X-1)\left(X-\frac{1}{2}\right)$ à racines simples, est un polynôme annulateur de la matrice C.

Correction

- La première proposition est fausse : C n'est pas triangulaire inférieure. Par contre : C est triangulaire supérieure et inversible car ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- On lit les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure sur sa diagonale donc C admet une valeur propre double $\frac{1}{2}$ et une valeur propre simple 1. Néanmoins la seconde proposition est fausse car pour qu'une matrice soit diagonalisable, il n'est pas nécessaire que toutes ses valeurs propres soient de multiplicité 1.
- La troisième proposition est grossièrement fausse : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable bien que son spectre ne contienne pas la valeur propre 0.
- $(C-I_3)\left(C-\frac{1}{2}I_3\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas un polynôme annulateur de C donc la quatrième proposition est fausse.

12. On établit que
    - la matrice J est nilpotente.
    - la suite de terme général J^n est stationnaire car $J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel non nul n.
    - $C^n = \frac{1}{2^n}\left(I_3 + nJ + 2^nJ^2 - J^2 - nJ^2\right)$
    - $C^n = \frac{1}{2^n}\left(I_3 + nJ + n(n-1)J^2\right)$
    - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

    Correction

    - J étant triangulaire supérieure, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale. En particulier, 1 est valeur propre de J et il existe x non nul tel que $Jx = x$.
      On en déduit par récurrence :
      $\forall p \in \mathbb{N}\ J^p x = 1^p x = x \neq 0$
      Donc la matrice J^p est non nulle pour tout $p \in \mathbb{N}$.
      J n'est donc pas nilpotente.
    - La deuxième proposition est fausse car $J^1 = J \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Néanmoins, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par un calcul simple.
On observe de même que $J^3 = J^2$. On montre alors par récurrence :
$\forall n \geq 2 \; J^n = J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- On observe que $C = \dfrac{1}{2}(I_3 + J)$.
  La formule de l'énoncé est valable pour $n = 0$ et $n = 1$ et :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \; C^n &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k \text{ car } I_3 \text{ et } J \text{ commutent} \\ &= \frac{1}{2^n} \left(I_3 + nJ + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \; J^2 \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(I_3 + nJ + (2^n - 1 - n)J^2 \right) \end{aligned}$$

  La troisième proposition est donc vraie.
- La quatrième proposition est fausse :
  elle donne $C^2 = \dfrac{1}{4} \left(I_3 + 2J + 2J^2 \right)$ alors que $C^2 = \dfrac{1}{4} \left(I_3 + 2J + J^2 \right)$

13. La suite de terme général C^n
    - est une suite convergente de limite n'appartenant pas à $\mathcal{S}_3$.
    - est une suite d'éléments de $\mathcal{S}_3$, convergente et de limite la matrice de $\mathcal{S}_3$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
    - est définie par $C^n = \dfrac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout n entier naturel non nul.
    - ne converge pas car la suite de terme général $\dfrac{n}{2^n}$ diverge.
    - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

    Correction

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \; C^n &= \frac{1}{2^n} \left(I_3 + nJ + 2^n J^2 - J^2 - nJ^2 \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (2^n - n - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

    On en déduit immédiatement que la troisième proposition est exacte.
    On vérifie, en revenant à la définition, que $C^n \in \mathcal{S}_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    De plus $C^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathcal{S}_3$.

On en déduit que la deuxième proposition est exacte et que la première et la quatrième sont fausses.
Au passage : $\dfrac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

14. On a :
    - $\mathcal{S}_r$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.
    - $\mathcal{S}_r$ n'est pas un sous-espace vectoriel mais est stable pour le produit matriciel.
    - la proposition de l'énoncé n'est pas évaluable dans le cadre du programme actuel de PC.
    - la proposition de l'énoncé n'est pas évaluable dans le cadre du programme actuel de PC.
    - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

    Correction
    $\mathcal{S}_r$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ car il ne contient pas la matrice nulle.
    Par contre $\mathcal{S}_r$ est stable pour le produit matriciel :
    Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{S}_r$.
    Soit $C = AB$.
    $\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2 \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} (a_{i,k} \geq 0)\,(b_{k,j} \geq 0) \geq 0$

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1;r]\!] \ \sum_{j=1}^{r} c_{i,j} &= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} a_{i,k} b_{k,j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(a_{i,k} \sum_{j=1}^{r} b_{k,j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} \\
&= 1
\end{aligned}$$

15. Soit A une matrice de l'ensemble $\mathcal{S}_r$
    - le spectre de A contient 1 car le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 est un vecteur propre associé à 1.
    - 1 n'est pas valeur propre de A car le polynôme caractéristique de A n'est pas divisible par le polynôme $X - 1$
    - pour tout entier naturel n, la matrice A^n appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_r^*$
    - la matrice A^n, n étant un entier naturel, n'appartient pas nécessairement à l'ensemble $\mathcal{S}_r$
    - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

    Correction
    - Soit X le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 et $Y = AX$.
      X est évidemment non nul et :

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1;r]\!] \ y_i &= \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} \\
&= 1
\end{aligned}$$

      Donc la première proposition est vraie.

- La première étant vraie, la deuxième est fausse.
- La troisième propriété est fausse $A^0 = I_n$ n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{S}_r^*$
- La quatrième propriété est fausse : $\mathcal{S}_r$ étant stable par produit matriciel, une récurrence élémentaire donne :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ A^n \in \mathcal{S}_r$

16. Soit A une matrice de l'ensemble $\mathcal{S}_r$. Si on suppose que la suite de terme général A^n converge, sa limite A^∞
    - n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{S}_r$
    - est une matrice stochastique
    - commute avec la matrice A pour le produit matriciel et vérifie $AA^\infty = A^\infty$
    - ne commute pas avec la matrice A pour le produit matriciel
    - aucune des propositions précédentes n'est vraie.

    Correction
    D'après la question précédente :
    - $\forall n \in \mathbb{N}; \forall (i,j)^2\ \in [\![1;r]\!]\ (A^n)_{i,j} \geq 0$
    - $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall i \in [\![1;r]\!]\ \sum_{j=1}^{n} (A^n)_{i,j} = 1$

    En passant à la limite :
    - $\forall (i,j)^2\ \in [\![1;r]\!]\ (A^\infty)_{i,j} \geq 0$
    - $\forall i \in [\![1;r]\!]\ \sum_{j=1}^{n} (A^n)_{i,j} = 1$

    Donc A^∞ est stochastique : la première proposition est fausse et la deuxième est vraie.
    $\forall n \in \mathbb{N}\ AA^n = A^nA$
    En passant à la limite :
    $AA^\infty = A^\infty A$: A et A^∞ commutent et la quatrième proposition est fausse.
    $\forall n \in \mathbb{N}\ AA^n = A^{n+1}$
    En passant à la limite :
    $AA^\infty = A^\infty$
    Donc la troisième propriété est vraie.
17. Soit $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, de coefficients $m_{i,j}$, à diagonale strictement dominante.
    La matrice M :
    - est inversible car sinon il existerait une matrice X non nulle de l'ensemble $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ des matrices à r lignes et 1 colonne à coefficients réels solution du système homogène de matrice M ce qui contredirait l'hypothèse sur M
    - n'est pas inversible
    - est diagonalisable.
    - n'est ni diagonalisable ni inversible.
    - aucune des propositions précédentes n'est vraie

    Supposons M non inversible.
    Il existe alors une matrice X non nulle de l'ensemble $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ des matrices à r lignes et 1 colonne à coefficients réels solution du système homogène de matrice M ie $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tq $MX = 0$.
    On a donc :
    $\forall i \in [\![1;r]\!]\ \sum_{j=1}^{r} m_{i,j}x_j = 0$
    On en déduit :
    $\forall i \in [\![1;r]\!]\ m_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} m_{i,j}x_j$

Avec l'inégalité triangulaire :
$\forall i \in [\![1;r]\!] \ |m_{i,i}| \ |x_i| \leq \sum_{j\neq i} |m_{i,j}| \ |x_j|$
On choisit i tel que $|x_i| = \|X\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$:
$|m_{i,i}| \ \|X\|_\infty \leq \sum_{j\neq i} |m_{i,j}| \ \|X\|_\infty$
X est non nul donc $\|X\|_\infty > 0$, ce qui permet de simplifier et d'obtenir :
$|m_{i,i}| \leq \sum_{j\neq i} |m_{i,j}|$ ce qui est absurde.
Donc la première propriété est vraie.
On en déduit immédiatement que la deuxième et la quatrième sont fausses.
La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est à diagonale strictement dominante mais n'est pas diagonalisable donc la troisième propriété est fausse.

18. Soit A une matrice de l'ensemble $\mathcal{S}_r^*$.
On note B la matrice $B = A - I_r$ et C_1 la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de B. On établit que :
    - la matrice C_1 est une matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante
    - la matrice C_1 appartient à $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ mais n'est pas à diagonale strictement dominante
    - le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est une droite car le rang de la matrice B vaut $r-1$
    - le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est un plan car le rang de la matrice B vaut $r-2$

    Correction
    - C_1 a $r-1$ lignes et $r-1$ colonnes donc la première proposition est fausse.
    - Soit i compris entre 1 et $r-1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r-1} |c_{i,j}| &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r-1} |a_{i,j}| \\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r-1} a_{i,j} \text{ car } a_{i,j} \geq 0 \\
&= \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} - a_{i,i} - a_{i,r} \\
&= 1 - a_{i,i} - a_{i,r} = b_{i,i} - a_{i,r} \\
&< b_{i,i} = c_{i,i} \text{ car } a_{i,r} > 0 \text{ vu que } A \in \mathcal{S}_r^*
\end{aligned}$$

    On en déduit $c_{i,i} > 0$ et $|c_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r-1} |c_{i,j}|$: la matrice C_1 est à diagonale strictement dominante.
    La deuxième proposition est fausse.
    - La matrice C_1 est donc inversible. Ses $r-1$ colonnes sont donc linéairement indépendantes. Il en est donc de même de celles de B qui sont plus longues. Donc B est de rang supérieur ou égal à $r-1$.
    Mais B n'est pas inversible car 1 est valeur propre de A donc le rang de B est inférieur

ou égal à $r-1$.
On en déduit que B est de rang $r-1$ et que son noyau, qui est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1, est de dimension 1.
La troisième propriété est vraie et la quatrième est fausse.

19. On considère toujours une matrice A de l'ensemble $\mathcal{S}_r^*$ de coefficients $a_{i,j}$ et on note λ une valeur propre complexe de A
    - le point d'affixe λ est à l'intérieur du cercle de rayon $1-a_{i,i}$ et de centre le point d'affixe $a_{i,i}$ appartenant à l'intervalle $[0;1[$ car la matrice $A-\lambda I_r$ n'est pas à diagonale strictement dominante puisqu'elle n'est pas inversible
    - la matrice $A-\lambda I_r$ est à diagonale strictement dominante
    - les valeurs propres de A sont de module strictement supérieur à 1
    - les valeurs propres de A distinctes de 1 sont toutes de module strictement inférieur à 1 car $|\lambda - a_{i,i}| < 1 - a_{i,i}$ pour tout $i \in [\![1;r]\!]$.
    - aucune des propositions précédentes n'est vraie

    Correction
    λ étant valeur propre de A, la matrice $A-\lambda I_r$ n'est pas inversible. Elle ne peut donc pas être à diagonale strictement dominante : la deuxième proposition est fausse.
    On en déduit :
    $$\exists i_0 \in [\![1;r]\!] \text{ tq } |\lambda - a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{r} |a_{i_0,j}| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{r} a_{i_0,j} = 1 - a_{i_0,i_0}$$
    mais il n'y a pas de raison que cela soit vrai pour tout i compris entre 1 et r donc la première proposition est fausse.
    $|\lambda| = |\lambda - a_{i_0,i_0} + a_{i_0,i_0}| \leq |\lambda - a_{i_0,i_0}| + |a_{i_0,i0}| \leq 1 - a_{i_0,i_0} + a_{i_0,i_0} = 1$
    donc la troisième proposition est fausse.
    La quatrième proposition est fausse pour la même raison que la première.
    Néanmoins, si λ est différent de 1 $\lambda - a_{i_0,i_0}$ avec a_{i_0,i_0} $\in]0;1[$ ne peut pas être réel strictement positif donc il y a inégalité stricte dans l'inégalité triangulaire :
    $|\lambda| = |\lambda - a_{i_0,i_0} + a_{i_0,i_0}| < |\lambda - a_{i_0,i_0}| + |a_{i_0,i0}| \leq 1 - a_{i_0,i_0} + a_{i_0,i_0} = 1$

20. On considère dans cette question une matrice A de l'ensemble $\mathcal{S}_r$ de coefficients $a_{i,j}$ et on note λ une valeur propre de A. On a :
    - les valeurs propres de A sont de module supérieur ou égal à 1
    - les valeurs propres de A sont toutes de module strictement inférieur à 1.
    - le déterminant de A est inférieur ou égal à 1 car le déterminant est le produit des valeurs propres de A
    - le déterminant de A est supérieur ou égal à 1
    - aucune des propositions précédentes n'est vraie

    Correction
    - La matrice B de la question 7 montre que la première affirmation est fausse.
    - La matrice I_r montre que la deuxième affirmation est fausse.
    - λ étant valeur propre de A, la matrice $A-\lambda I_r$ n'est pas inversible. Elle ne peut donc pas être à diagonale strictement dominante.
      On en déduit :
      $$\exists i_0 \in [\![1;r]\!] \text{ tq } |\lambda - a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{r} |a_{i_0,j}| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{r} a_{i_0,j} = 1 - a_{i_0,i_0}$$
      $|\lambda| = |\lambda - a_{i_0,i_0} + a_{i_0,i_0}| \leq |\lambda - a_{i_0,i_0}| + |a_{i_0,i0}| \leq 1 - a_{i_0,i_0} + a_{i_0,i_0} = 1$
      Le déterminant de A étant le produit des valeurs propres complexes comptées avec

leurs multiplicités, c'est le produit de r complexes de module inférieur ou égal à 1. C'est donc un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1.
Mais A est une matrice réelle donc son déterminant est réel et c'est un élément de $[-1;1]$.
Par conséquent la troisième proposition est vraie.
- La matrice B de la question 7 montre que la quatrième affirmation est fausse.

21. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$ tels que :
pour tout couple d'entiers (i,j) d'entiers de $[\![1;r]\!]$, $m_{i,j}$ appartient à l'intervalle $]0;1[$
et pour tout entier naturel i de $[\![1;r]\!]$, la somme de tous les coefficients de la ligne i est inférieure ou égale à 1.
Désignant par $\det(M)$ le déterminant de M, on établit
- par récurrence que $|\det(M)|$ est supérieur ou égal à 1
- par récurrence que $|\det(M)| < 1$ car $|\det(M)|$ est strictement inférieur à la somme de tous les coefficients $m_{1,j}$ de la première ligne de la matrice M
- la valeur absolue du déterminant de toute matrice stochastique stricte est strictement inférieure à 1
- la valeur absolue du déterminant de toute matrice stochastique stricte est supérieure ou égale à 1
- aucune des propositions précédentes n'est vraie

Correction
- La matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ montre que la première et la quatrième proposition sont fausses.
- La seconde proposition est vraie :
Si $r = 1$ alors $M = (x)$ avec $0 < x < 1$.
$|\det(M)| = |x| < 1$
On suppose la propriété vraie au rang $r-1$.
En développant par rapport à la première ligne :
$\det(M) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{1+j} m_{i,j} \Delta_{1,j}(M)$
où $\Delta_{i,j}(M)$ est le déterminant de la matrice obtenue en rayant la première ligne et la $j$ième colonne de M.
Cette matrice vérifie les mêmes hypothèses que M donc $|\Delta_{1,j}(M)| < 1$
On en déduit avec l'inégalité triangulaire :
$|\det(M)| \leq \sum_{j=1}^{r} m_{i,j} |\Delta_{1,j}(M)| < \sum_{j=1}^{r} m_{i,j} \leq 1$
en utilisant $m_{i,j} > 0$
- Comme on suppose $r \geq 2$ aucun coefficient d'une matrice stochastique ne peut être égal à 1.
On peut donc appliquer le point précédent pour affirmer que la troisième proposition est vraie.