

ANALYSE 1

2024-2025

Correction

Correction des exercices du quatrième chapitre du cours

941

Exercice 1 (Mines 2011)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{x^n}{n^n}$.

Correction

Soit $r > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{r^n}{n^n} > 0.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{r}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n}$$

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \exp \left(-n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$$

$$-n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim -n \frac{1}{n} = -1 \text{ donc } -n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

$$\text{Donc } \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert la série de terme général $\frac{r^n}{n^n}$ converge, pour tout $r > 0$.

Le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{x^n}{n^n}$ est donc infini.

Exercice 2 (Mines 2011)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{\sinh n}{n} x^n$.

Correction

Soit $r > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{\sinh n}{n} r^n > 0.$$

$$\sinh n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \sim \frac{e^n}{2}$$

$$\text{Donc } u_n \sim \frac{e^n r^n}{2}.$$

$$\text{On en déduit } \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim er.$$

Si $r < e^{-1}$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} er < 1$ et la série de terme général u_n converge.

Si $r > e^{-1}$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} er > 1$ et la série de terme général u_n diverge.

Finalement le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{\sinh n}{n} x^n$ est e^{-1} .

Exercice 3 (Centrale 2019)

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée.

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge.

Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Correction

1. On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

de $\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ tq la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$.

Ici, on suppose que 1 appartient à $\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ tq la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$.

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

2. $\sum a_n$ converge donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

On en déduit que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n x^n \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0; 1]$.

- La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in [0; 1]} (|f_n(x)|) = \sup_{x \in [0; 1]} (a_n x^n) = a_n : \text{on utilise } a_n \geq 0$$

Donc la série de terme général $\sup_{x \in [0; 1]} (|f_n(x)|)$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0; 1]$.

Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$

On en déduit que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0; 1]$ et :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$