ANALYSE 1
TD
2024-2025
Chapitre 4
Séries entières

941

1 Rayon de convergence d'une série entière

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} 2^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$.

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-\lfloor n\sqrt{3}\rfloor} z^n$.

Exercice 3

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!\, n^{2n}}{2^n\, n!\,(3n)!} z^n$.

Exercice 4 *(CCP 2019)*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in]-1;0[\\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$.

1. Soit $f : x \mapsto x + x^2$.
   Etudier les variations de f et en déduire :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in]-1;0[$
2. (a) Est-ce que la suite (u_n) converge. Si c'est le cas, déterminer sa limite l.
   (b) Est-ce que la série de terme général u_n^2 converge ? Si c'est le cas, exprimer sa somme en fonction de u_0.
3. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
   (b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
4. (a) Soit $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$.
   Montrer que (a_n) converge. On note l sa limite.

(b) On admet $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ (théorème de Césaro).
Déterminer un équivalent de u_n.
Est-ce que la série de terme général u_n converge ?

5. Démontrer le théorème de Césaro.

Exercice 5 *(Centrale 2017)*

On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

(i) $a_0 > 0$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum a_n(-R)^n$.
3. Déterminer un équivalent de a_n.
   Indication :
   Utiliser $u_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$.
4. En déduire la nature de la série $\sum a_n R^n$.
5. **Question supplémentaire :**
   Démonstration du théorème de Césaro.

Exercice 6 *(X 2018)*

Soit I_n le nombre de bijections $f : [\![1;n]\!] \to [\![1;n]\!]$ telles que $f\circ f = Id_{[\![1;n]\!]}$.
Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{I_n}{n!}x^n$.

Exercice 7 *(CCP 2018, 2021)*

On considère une application $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.
2. (a) Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f_1'.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.
   On admet provisoirement la propriété suivante :
   $\forall a > 0,\ \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-a,a],\ |f_n(x)| \leqslant K\dfrac{|x|^n}{n!}$
3. (a) Soit $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $F' - F = f_0$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.
5. Prouver la propriété admise.

2 Continuité, limites

Exercice 8 *(X 2021)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général a_n diverge.
On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 9 *(Centrale 2018, 2019 maths 2)*

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_f =]-1;1[$.
2. Montrer :
   $\forall x \in]-1;1[\ f(x) > 0$
3. Donner le graphique de f. Que peut-on conjecturer lorsque x tend vers -1 ?
4. On pose $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et on donne $G = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (a) Existence de G.
   (b) Montrer que $f(x) \sim_{1^-} \dfrac{G}{\sqrt{1-x}}$.
5. A l'aide d'un graphe, montrer que $f(x) - \dfrac{G}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} \dfrac{1}{2}$.
6. Soit $x \in]0;1[$.
   Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \displaystyle\int_0^t x^{s^2}\mathrm{d}s \end{cases}$.
   Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$.
   Montrer :
   $$\int_n^{n+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = x^{n^2} + n\ln(x)x^{n^2} + \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$
7. Montrer que $f(x) - \dfrac{G}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} \dfrac{1}{2}$.
8. Montrer que $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to -1\\ x>-1}]{} \dfrac{1}{2}$.

Exercice 10 *(Mines 2017)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Trouver le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} t^n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k\,\mathrm{d}t$

Exercice 11 *(X 2018)*

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{(n!)^2}$.
   On note S la somme de cette série entière.
2. Montrer que $S(x) = o_{+\infty}(\mathrm{e}^x)$.

3 Intégration terme à terme

Exercice 12 *(Centrale 2019)*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Soit $S \begin{cases} D(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$.

1. Montrer :
   $\forall r \in [0; R[\ \forall n \in \mathbb{N} \ \displaystyle\int_0^{2\pi} S\left(r\,\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_n r^n$
2. On suppose que $R = +\infty$.
   (a) Si la fonction S est bornée sur $\mathbb{C}$ montrer qu'elle est constante.
   (b) D'autres questions non traitées.

Exercice 13 *(Mines 2022)*

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   On donne $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N} \ I_n = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$
3. Développer F en série entière.
4. Exprimer F à l'aide des fonctions usuelles

4 Calculs de sommes à l'aide de séries entières

Exercice 14 *(X 2019)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.
On s'aidera de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

5 Relations de récurrence et séries entières

Exercice 15 *(CCP 2022)*

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t - 1} \end{cases}$.

1. On admet que $\varphi(t) = 1 + t + t^2 + \dfrac{5}{6}t^3 + o_{t\to 0}(t^3)$. Déterminer $\varphi^{(n)}(0)$ pour $n \in [\![0;3]\!]$.

2. On définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.
   (a) Calculer p_1, p_2 et p_3.
   (b) Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ p_n \leq n!$
3. On définit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$.
   (a) Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est strictement positif.
   (b) On admet que :
   $\forall x \in]-R; R[\ f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$
   Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ p_n = \varphi^{(n)}(0)$
4. Montrer :
   $\forall x \in]-R; R[\ f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$
5. Soit P_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.
   Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$.

Exercice 16 *(Mines 2017)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
- $a_0 = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$

1. Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq \mathrm{e}^n$
2. Soit R le rayon de convergence de série entière $\sum a_n x^n$ et S sa somme.
   Montrer que $R > 0$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$.
   Calculer $S(x)$.

6 Fonctions développables en série entière

Exercice 17

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Développer en série entière la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-z}$.

Exercice 18 *(Mines 2014)*

Développer en série entière la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$.

Exercice 19

Développer en série entière la fonction : $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2-x}{3-x^2}\right)$.

Exercice 20

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x$.

Exercice 21 *(Centrale 2016)*

Soit f définie quand c'est possible par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)$$

1. Trouver J, intervalle ouvert, sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et montrer que f est solution d'une équation différentielle du second ordre.
2. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que :
   $\forall x \in]-R;R[\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{2k+1}$
   Le candidat n'a pas eu le temps de terminer mais il semble qu'on attendait la valeur de R et une expression des coefficients.

Exercice 22 *(Centrale 2019, Mines 2021, 2023)*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-a,a[$.
On suppose :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in\ [0,a[,\ f^{(n)}(x) \geq 0$.

1. Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et $x \in]0;a[$.
   On note $R_n(x)$ le reste.
2. En déduire que la série de Taylor de f converge pour tout $x \in\ ]0,a[$.
3. Soit x, y tels que $0 < x < y < a$. Montrer qu'on a $R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$. En déduire que f est égale à la somme de sa série de Taylor.
4. Montrer que tan est développable en série entière sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
5. Cette question n'avait pas été posée en 2019.
   On pose $\tan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Montrer que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$

Exercice 23 *(Mines 2016)*

Domaine de définition de $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$?
g est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 24 *(Mines 99)*

Soit $f \begin{cases}]-\pi/2;\pi/2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$

1. Trouver un $DL_2(0)$ de f.
2. On suppose que f se développe en série entière sur $]-R;R[$, $R>0$.
   - Pourquoi peut-on écrire $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$?
   - Trouver une relation de récurrence entre les a_n (on écrira que $f(x)\times \cos x = 1$).
3. Montrer qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq \rho^n$
4. - Montrer que f se développe en série entière sur $]-R;R[$ avec $R>0$.
   - Majorer R.

Exercice 25 *(Centrale)*

On pose $F_x(t) = \mathrm{e}^{xt-t^2/2}$.

1. Montrer que F_x est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que :
   $\forall t \in \mathbb{R}\ F_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n$
   où : $\forall n \in \mathbb{N}\ P_n \in \mathbb{R}[X]$.
2. Trouver une relation entre P_{n-1}, P_n et P_{n+1}.
3. En déduire que :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ P_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{x^2/2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)$

Exercice 26 *(Mines 2016)*

Montrer l'existence d'une unique suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on explicitera, tels que :
$\exp\left(tx - \dfrac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)t^n$
Donner les propriétés de cette suite.

7 Etudes de sommes de séries entières

Exercice 27

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n^2+3n-1}{n+3}x^n$.

Exercice 28 *(CCP 2022)*

$\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n(2n-1)}x^{2n}$

1. Montrer que S est bien définie et dérivable.
   Que vaut $S'(x)$?
2. Calculer $S(x)$.

Exercice 29 *(Mines 2005, X 2014)*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n}\, x^n$.

Exercice 30 *(Mines 2016)*

On considère $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$.

1. Rayon de convergence ?
2. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$.

   Continuité en 1 ?
3. Calculer $f(x)$ puis déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.