ANALYSE 1
TD
2024-2025
Chapitre 4
Séries entières
Correction

941

1 Rayon de convergence d'une série entière

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} 2^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$.

Correction
Soit $r>0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ 2^{n^2} r^{1+2+\cdots+n} > 0$
$\dfrac{2^{(n+1)^2} r^{1+2+\cdots+n+1}}{2^{n^2} r^{1+2+\cdots+n}} = 2^{2n+1} r^{n+1} = (4r)^n\ 2r$
Si $r < \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum_{n\geq 1} 2^{n^2} r^{1+2+\cdots+n} > 0$ converge.
Si $r > \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\sum_{n\geq 1} 2^{n^2} r^{1+2+\cdots+n} > 0$ diverge.
Donc $R = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-\lfloor n\sqrt{3}\rfloor} z^n$.

Correction

$$\begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N} & -1 + n\sqrt{3} \leq \lfloor n\sqrt{3}\rfloor \leq n\sqrt{3} \\ & 1 - n\sqrt{3} \geq -\lfloor n\sqrt{3}\rfloor \geq -n\sqrt{3} \\ & \mathrm{e}\ \mathrm{e}^{-n\sqrt{3}} \geq \mathrm{e}^{-\lfloor n\sqrt{3}\rfloor} \geq \mathrm{e}^{-n\sqrt{3}} \end{array}$$

et tout est positif donc :
$\mathrm{e}^{-\lfloor n\sqrt{3}\rfloor} = O\left(\mathrm{e}^{-n\sqrt{3}}\right)$ ce qui entraîne $R \geq R_{CV}\left(\sum \mathrm{e}^{-n\sqrt{3}} z^n\right)$
$\mathrm{e}^{-n\sqrt{3}} = O\left(\mathrm{e}^{-\lfloor n\sqrt{3}\rfloor}\right)$ ce qui entraîne $R_{CV}\left(\sum \mathrm{e}^{-n\sqrt{3}} z^n\right) \leq R$

Or : $R_{CV}\left(\sum \mathrm{e}^{-n\sqrt{3}} z^n\right) = R_{CV}\left(\sum \left(\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} z\right)^n\right) = \mathrm{e}^{\sqrt{3}}$
Donc $R = \mathrm{e}^{\sqrt{3}}$.

Exercice 3

Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!\, n^{2n}}{2^n\, n!\, (3n)!} z^n$.

Correction
Soit $r > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \dfrac{(2n)!\, n^{2n}}{2^n\, n!\, (3n)!} r^n > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!(n+1)^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!(3n+3)!}\ \frac{2^n n!(3n)!}{(2n)! n^{2n}}\ r \\
&= \frac{2^n}{2^{n+1}}\ \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\ \frac{n!}{(n+1)!}\ \frac{(3n)!}{(3n+3)!}\ \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}}\ r \\
&= \frac{1}{2}\ \frac{(2n+1)2(n+1)(n+1)^2}{(n+1)3(n+1)(3n+2)(3n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} r \\
&= \frac{(2n+1)(n+1)}{3(3n+2)(3n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} r \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2\,\mathrm{e}^2 r}{27}
\end{aligned}$$

Si $r < \dfrac{27}{2\,\mathrm{e}^2}$ alors $\dfrac{2\,\mathrm{e}^2 r}{27} < 1$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!\, n^{2n}}{2^n\, n!\, (3n)!} r^n$ converge.
Si $r > \dfrac{27}{2\,\mathrm{e}^2}$ alors $\dfrac{2\,\mathrm{e}^2 r}{27} > 1$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!\, n^{2n}}{2^n\, n!\, (3n)!} r^n$ diverge.
On en déduit $R = \dfrac{27}{2\,\mathrm{e}^2}$.

Exercice 4 *(CCP 2019)*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in]-1;0[\\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$.

1. Soit $f : x \mapsto x + x^2$.
   Etudier les variations de f et en déduire :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in]-1;0[$
2. (a) Est-ce que la suite (u_n) converge. Si c'est le cas, déterminer sa limite l.
   (b) Est-ce que la série de terme général u_n^2 converge ? Si c'est le cas, exprimer sa somme en fonction de u_0.
3. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
   (b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
4. (a) Soit $a_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}}$.
   Montrer que (a_n) converge. On note l sa limite.
   (b) On admet $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} a_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ (théorème de Césaro).
   Déterminer un équivalent de u_n.
   Est-ce que la série de terme général u_n converge ?

5. Démontrer le théorème de Césaro.

Correction

1. f et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = 1 + 2x$
   f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1/2]$ de $+\infty$ à $-\dfrac{1}{4}$.
   f est strictement croissante sur $[1/2; +\infty[$ de $-\dfrac{1}{4}$ à $+\infty$.
   D'après le tableau de variations, $f(]-1;0[) = \left[-\dfrac{1}{4}; 0\right[$.
   L'intervalle $]-1;0[$ est donc stable par f.
   Une récurrence facile permet alors de montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in]-1;0[$
2. (a) (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.
   Notons l sa limite.
   f étant continue sur $\mathbb{R}$, $f(l) = l$.
   On en déduit $l = 0$.

   (b) $u_n^2 = u_{n+1} - u_n$.
   Par téléscopage :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = u_{n+1} - u_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -u_0$.
   La série de terme général u_n^2 converge et sa somme est $-u_0$.
3. (a) $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

   (b) La série de terme général $(-1)^n u_n$ converge par application du théorème spécial sur la convergence des séries alternées :
   - $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est alternée.
   - $(-1)^n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   - $(|(-1)^n u_n|)_{n\in\mathbb{N}} = (-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. (a) $a_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n u_{n+1}} = \dfrac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

   (b) Par téléscopage et Césaro :
   $\dfrac{1}{nu_1} - \dfrac{1}{nu_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
   $\dfrac{1}{nu_1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{nu_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ et $nu_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.
   On en déduit $(n-1)u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ puis $u_n \sim -\dfrac{1}{n-1} \sim -\dfrac{1}{n}$
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \leq 0$ et $-\dfrac{1}{n} \leq 0$
   La série de terme général $-\dfrac{1}{n}$ diverge donc la série de terme général u_n diverge.
5. Il s'agit de montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ alors $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

   Soit $\epsilon > 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ |u_n - l| \leq \epsilon$

$$\begin{aligned}
\forall n \geq n_0 + 2\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - l\right| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - l)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|u_k - l| = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n-1}|u_k - l| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n-1}\epsilon = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| + \frac{n-n_0-1}{n}\epsilon \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| + \epsilon
\end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l|$ est indépendant de n donc $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et :

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| \leq \epsilon$

On a alors :

$\forall n \geq \max(n_0, n_1)\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - l\right| \leq 2\epsilon$

On a bien $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Exercice 5 *(Centrale 2017)*

On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

(i) $a_0 > 0$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum a_n(-R)^n$.
3. Déterminer un équivalent de a_n.
   Indication :
   Utiliser $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.
4. En déduire la nature de la série $\sum a_n R^n$.
5. **Question supplémentaire :**
   Démonstration du théorème de Césaro.

Correction

1. On commence par une étude classique de suite récurrente.
   Soit $f \begin{cases}]-1; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1 + x) \end{cases}$.
   On fait l'étude rapide des variations de f : f est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.
   $f(\mathbb{R}_+^*) =]f(0); +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ donc (a_n) est bien définie et :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n > 0$.

On fait ensuite l'étude de $g : x \mapsto f(x) - x$.
On en déduit : $\forall x > 0\ f(x) < x$
On en déduit que (a_n) décroît (strictement).
(a_n) étant minorée par 0, elle converge vers $l \in \mathbb{R}_+$.
f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, $f(l) = l$.
D'après l'étude précédente, la seule possibilité est $l = 0$.
Donc (a_n) converge vers 0.
On peut alors utiliser la règle de d'Alembert.
$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $R = 1$.

2. Comme $R = 1$, il s'agit de déterminer la nature de la série $\sum a_n(-1)^n$.
On applique le TSCSA :
   - $\sum a_n(-1)^n$ est alternée.
   - La suite $(|(-1)^n a_n|)_{N\in\mathbb{N}}$ décroît.
   - La suite $(|(-1)^n a_n|)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

   Donc la série $\sum a_n(-1)^n$ converge.
3.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} \\ &= \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n^2/2 + o(a_n^2)}{a_n a_{n+1}} \end{aligned}$$

On en déduit : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$
Par Césaro :
$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$
Mais : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right)$
$\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right) \sim \frac{1}{na_n}$.
On a donc : $\frac{1}{na_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ et $a_n \sim \frac{2}{n}$.

4. Comme tout est positif, on en déduit que $\sum a_n$ diverge. ($R = 1$ donc $a_n R^n = a_n$)

5. Il s'agit de montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
Soit $\epsilon > 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ |u_n - l| \leq \epsilon$

$$\begin{array}{rcl} \forall n \geq n_0 + 2\ \left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k - l\right| & = & \dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - l)\right| \\ & \leq & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|u_k - l| = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n-1}|u_k - l| \\ & \leq & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n-1}\epsilon = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| + \dfrac{n - n_0 - 1}{n}\epsilon \\ & \leq & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| + \epsilon \end{array}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l|$ est indépendant de n donc $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et :

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1\ \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - l| \leq \epsilon$

On a alors :

$\forall n \geq \max(n_0, n_1)\ \left|\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - l\right| \leq 2\epsilon$

On a bien $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Exercice 6 *(X 2018)*

Soit I_n le nombre de bijections $f : [\![1;n]\!] \to [\![1;n]\!]$ telles que $f \circ f = Id_{[\![1;n]\!]}$.
Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{I_n}{n!}x^n$.

Correction
On note S_n l'ensemble des permutations des entiers $1, 2, \ldots, n$.
On définit $T_n = \{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = Id\}$.
On note $I_n = \text{Card}(T_n)$ et on pose $I_0 = 1$.
$S_1 = \{id\}$, $I_1 = 1$
$S_2 = \{id; (1\ 2)\}$, $I_2 = 2$
Dans S_3, il y a $id, (1\ 2), (1\ 3)$ et $(2\ 3)$ qui appartiennent à T_3 et $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$ qui n'appartiennent pas à T_3.
$I_3 = 4$

$$\begin{array}{rcl} I_n & = & \text{Card}(T_n) = \text{Card}\left(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id\}\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\text{Card}\left(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = i\}\right) \\ & = & \text{Card}\left(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = 1\}\right) + \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\text{Card}\left(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = i\}\right) \\ & = & I_{n-1} + (n-1)\text{Card}\left(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = 2\}\right) \end{array}$$

Mais, $\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = 2\} = \{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma^2 = id \text{ et } \sigma(1) = 2 \text{ et } \sigma(2) = 1\}$ qui est de cardinal I_{n-2} (y compris si $n = 2$ avec la convention $I_0 = 1$) donc :

$\forall n \geq 2\ I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$

On pose $u_n = \dfrac{I_n}{n!}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2\ u_n &= \frac{I_n}{n!} = \frac{I_{n-1}+(n-1)I_{n-2}}{n!} = \frac{(n-1)!u_{n-1}+(n-1)(n-2)!u_{n-2}}{n!} \\ &= \frac{u_{n-1}+u_{n-2}}{n}\end{aligned}$$

- **Première méthode**
  Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.
  Supposons $u_{n-1} \leq Mr^{n-1}$ et $u_{n-2} \leq Mr^{n-2}$.

$$\begin{aligned}u_n &\leq \frac{u_{n-1}+u_{n-2}}{n} \leq \frac{M}{n}\left(r^{n-1}+r^{n-2}\right) \\ &\leq \frac{Mr^n}{n}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right) \leq 1$
  On choisit donc M assez grand pour que :
  $\forall n \in [\![0;n_0]\!]\ u_n \leq Mr^n$
  et on a alors :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq \dfrac{I_n}{n!} \leq Mr^n$
  Le rayon cherché est donc plus grand que $\dfrac{1}{r}$ pour tout $r > 0$. C'est donc $+\infty$.
- **Deuxième méthode**
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ I_n \leq \mathrm{Card}(S_n) = n!$
  $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq \dfrac{I_n}{n!} \leq 1$
  Donc $\dfrac{I_n}{n!} = O(1)$.
  Donc $R = R_{CV}\left(\sum \dfrac{I_n}{n!}x^n\right) \geq R_{CV}\left(\sum x^n\right) = 1$.

$$\begin{aligned}\forall x \in]-R;R[\ S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = u_1 + \sum_{n=2}^{+\infty}(u_{n-1}+u_{n-2})x^{n-1} \\ &= u_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2}x^{n-2} \\ &= u_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n + x\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= 1 + S(x) - u_0 + xS(x) \\ &= (1+x)S(x) \text{ car } u_0 = 1\end{aligned}$$

- Compte tenu de $S(0) = 1$, on en déduit :
  $\forall x \in]-R;R[\ S(x) = \mathrm{e}^{x+x^2/2}$
  qu'on peut écrire :

$\forall x \in]-R;R[\ S(x) = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x^2/2}$
S est donc le produit de deux fonctions DSE sur $\mathbb{R}$.
On en déduit $R = +\infty$

Exercice 7 *(CCP 2021)*

On considère une application $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ et donner la valeur de sa somme.
2. (a) Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f_1'.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.
   On admet provisoirement la propriété suivante :
   $\forall a > 0,\ \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-a,a],\ |f_n(x)| \leqslant K\dfrac{|x|^n}{n!}$
3. (a) Soit $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $F' - F = f_0$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.
5. Prouver la propriété admise.

Correction

1. Il s'agit de la série exponentielle. Son rayon est infini et sa somme est la fonction exponentielle.
2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ f_1(x) = \displaystyle\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t$
   D'après le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_1' = f_0$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie : $f_0 = f \in E$
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   D'après le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral, f_{n+1} est dérivable de dérivée f_n qui est de classe $\mathcal{C}^n$. Donc f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3. (a)
   - Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$:
     Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
     On applique la propriété admise avec $a = |x_0| + 1 > 0$.
     $\forall n \geq 1\ |f_n(x_0)| \leq K\dfrac{|x_0|^n}{n!}$ terme général d'une série convergente.
     Donc la série de terme général $f_n(x_0)$ converge.
   - La série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$:
     Soit $[b;c]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $a = \max(|b|, |c|)$.

On applique la propriété admise.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [b,c] \ \ |f_n'(x)| = |f_{n-1}(x)| \leq K \dfrac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leq K \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

On en déduit que F est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Le théorème de dérivation terme à terme utilisé dans la question précédente donne aussi :

$$F' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f_0 + F$$

4. F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = f_0(x)$.
ESSM : $y' = y$
Solution générale de l'ESSM : $y(x) = C\,\mathrm{e}^x$
On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^x$
On trouve $C'(x)\,\mathrm{e}^x = f_0(x)$
La solution générale est donc $y(x) = C\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
En particulier :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = C\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
Mais $F(0) = 0$ car la somme démarre à $n = 1$ donc $C = 0$.

5. Soit $a > 0$.
f_0 est une fonction continue sur le *segment* $[-a;a]$ donc $K = \sup\limits_{x\in[-a;a]} |f_0(x)| \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in [-a;a] \ \ |f_n(x)| \leq K \dfrac{|x|^n}{n!}$
$\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0;a] \ \ |f_{n+1}(x)| &= \left| \int_0^x f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^x |f_n(t)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^x K \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = K \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-a;0] \ \ |f_{n+1}(x)| &= \left| \int_0^x f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_x^0 |f_n(t)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_x^0 K \frac{(-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = K(-1)^n \frac{-x^{n+1}}{(n+1)!} = K \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

2 Continuité, limites

Exercice 8 *(X 2021)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général a_n diverge.
On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Correction
La série de terme général a_n diverge donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est inférieur ou égal à 1.
Comme on le suppose supérieur ou égal à 1, il vaut 1.
Soit S la somme de la série entière.
$\forall x \in [0;1[\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{x-1} \geq 0$
Donc S est croissante sur $[0;1[$.
Donc S a une limite $l \in [0;+\infty]$ en 1.
Supposons $l \in \mathbb{R}$.
S est croissante donc :
$\forall x \in [0;1[\ S(x) \leq l$.
Mais, les a_n étant positifs :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1[\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \leq S(x)$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1[\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \leq l$
On fixe n et on fait tendre x vers 1 :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leq l$
La suite des sommes partielles de $\sum a_n$ est majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge.
C'est absurde donc $l = +\infty$.

Remarque
Si la série de terme général a_n converge alors la série entière converge normalement sur $[-1;1]$:
$\forall n \in \mathbb{N}\ \sup\limits_{x\in[-1;1]} (|f_n(x)|) = a_n$
donc la somme de la série entière est continue sur $[-1;1]$.
On en déduit : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

Exercice 9 *(Centrale 2018, 2019 maths 2)*

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_f =]-1;1[$.
2. Montrer :
   $\forall x \in]-1;1[\ f(x) > 0$
3. Donner le graphique de f. Que peut-on conjecturer lorsque x tend vers -1 ?
4. On pose $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et on donne $G = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (a) Existence de G.

(b) Montrer que $f(x) \sim_{1^-} \dfrac{G}{\sqrt{1-x}}$.

5. A l'aide d'un graphe, montrer que $f(x) - \dfrac{G}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} \dfrac{1}{2}$.

6. Soit $x \in]0;1[$.
   Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \displaystyle\int_0^t x^{s^2}\,\mathrm{d}s \end{cases}$.
   Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$.
   Montrer :
$$\int_n^{n+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = x^{n^2} + n\ln(x)x^{n^2} + \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$

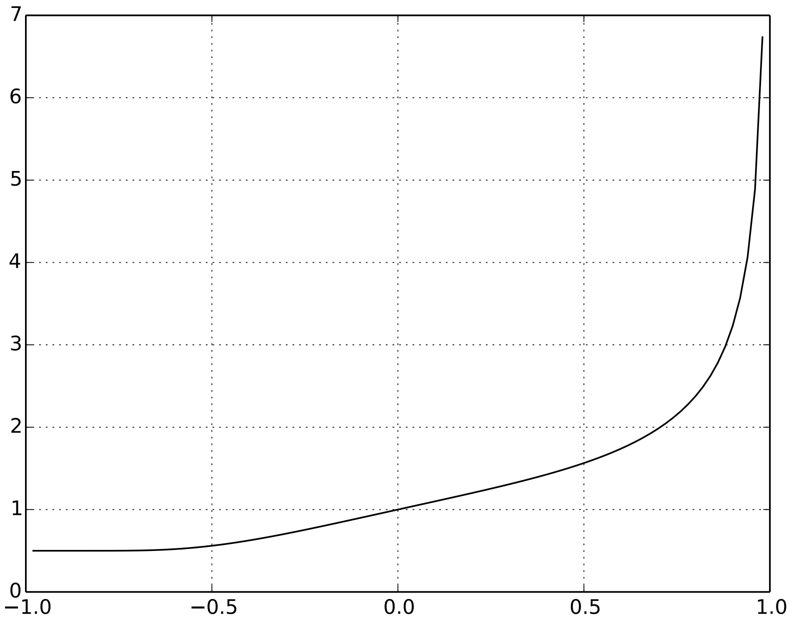
7. Montrer que $f(x) - \dfrac{G}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} \dfrac{1}{2}$.

8. Montrer que $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to -1\\ x>-1}]{} \dfrac{1}{2}$.

Correction

1. Même si elle est lacunaire, il s'agit d'une série entière.
   Soit $r > 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}\ r^{n^2} > 0$
   $\dfrac{r^{(n+1)^2}}{r^{n^2}} = r^{(n+1)^2-n^2} = r^{2n+1}$
   Si $r < 1$ alors $r^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Si $r > 1$ alors $r^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
   Donc $R = 1$.
   Enfin, la série est grossièrement divergente pour ± 1
2. C'est trivial pour $x \in]0;1[$.
   $f(0) = 1 > 0$
   Soit $x \in]-1;0[$.
   n et n^2 ont la même parité donc $(-1)^n = (-1)^{n^2}$.
   On en déduit que la série est alternée.
   On vérifie les autres hypothèses, dont la décroissance **stricte** et on écrit que $f(x)$ est du signe strict de son premier terme à savoir 1.
3.
```
def f(x,N):
    return sum(x**(n**2) for n in range(N+1))

import matplotlib.pyplot as pypl

les_x=[-1+2*i/100. for i in range(1,100)]

les_y=[f(x,50) for x in les_x]

pypl.plot(les_x,les_y,color='black')
```

```
pypl.grid()

pypl.show()
```

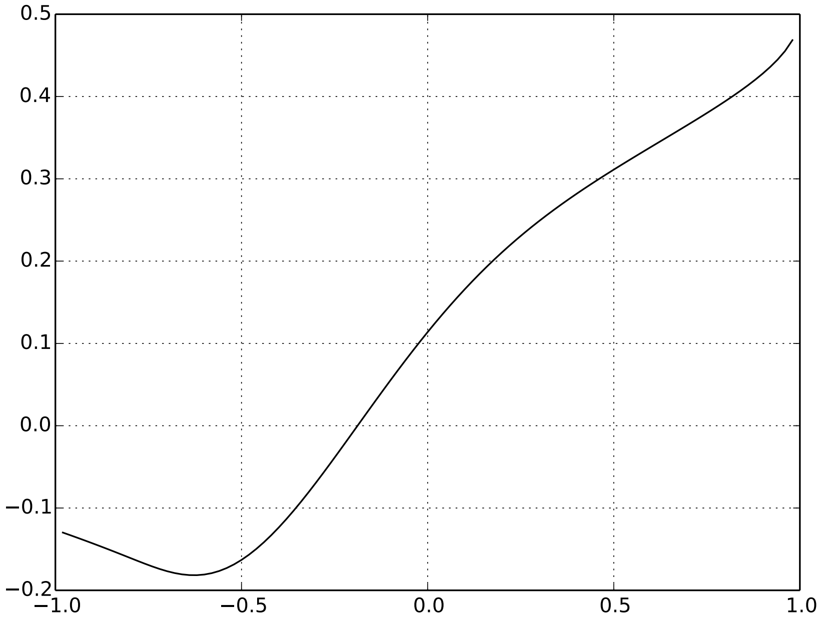


On conjecture $f(x) \xrightarrow[x\to-1]{} \dfrac{1}{2}$.

4. (a) Classique

   (b) On fixe $x \in]0;1[$.
   La fonction $h : t \mapsto x^{t^2} = \exp\left(t^2\ln(x)\right)$ est décroissante, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\Big(t^2\ln(x)\Big)\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \exp\Big(t^2\ln(x)\Big)\,\mathrm{d}t$
   Le changement de variable $u = t\sqrt{-\ln(x)}$ donne :
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\Big(t^2\ln(x)\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$
   et on conclut facilement.

5.
```
from math import pi,sqrt

G=sqrt(pi)*0.5

les_y=[f(x,50)-G/sqrt(1-x) for x in les_x]

pypl.plot(les_x,les_y,color='black')

pypl.grid()

pypl.show()
```



6. La fonction $s \mapsto x^{s^2} = \mathrm{e}^{s^2 \ln(x)}$ étant clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la définition de g ne pose pas de problème et g est $\mathcal{C}^\infty$ sut $\mathbb{R}$.
On applique ensuite la formule de Taylor avec reste intégral entre n et $n+1$:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \int_n^{n+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t &= g(n+1-g(n) \\ &= (n+1-n)g'(n) + \frac{(n+1-n)^2}{2}g''(n) + \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x^{n^2} + n\ln(x)x^{n^2} + \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car :
$\forall t \in \mathbb{R}\ g'(t) = x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2\ln(x)}$
$\forall t \in \mathbb{R}\ g''(t) = 2t\ln(x)x^{t^2}$

7. $\forall t \in \mathbb{R}\ g^{(3)}(t) = 2\ln(x)x^{t^2} + 4t^2(\ln(x))^2x^{t^2}$ avec $x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2\ln(x)}$ et $\ln(x) < 0$.
Donc :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \left|\int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2}\left|g^{(3)}(t)\right|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_n^{n+1} \left|g^{(3)}(t)\right|\,\mathrm{d}t \\ &\leq 2\left|\ln(x)\right| \int_n^{n+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t + 4(\ln(x))^2 \int_n^{n+1} t^2x^{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Les fonctions $t \mapsto x^{t^2}$ et $t \mapsto t^2x^{t^2}$ étant intégrables sur $\mathbb{R}_+$, la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq 2\left|\ln(x)\right| \int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t + 4(\ln(x))^2 \int_0^{+\infty} t^2x^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{(n+1-t)^2}{2}g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} 0$

On sait déjà que la série de terme général x^{n^2} converge et que $t\mapsto x^{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc la série de terme général nx^{n^2} converge (facile à vérifier directement et) :

$f(x)-\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{t^2}\,\mathrm{d}t = -\ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{(n+1-t)^2}{2}g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$

On en déduit :

$f(x)-\dfrac{G}{\sqrt{-\ln(x)}} = -\ln(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n^2}+o(1)$

On pose $x=1-h$ et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} &= \frac{1}{\sqrt{-\ln(1-h)}} = \left(h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)^{-1/2}\\ &= h^{-1/2}\left(1+\frac{h}{2}+o(h)\right)^{-1/2} = h^{-1/2}\left(1-\frac{h}{4}+o(h)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}}+o(1)\end{aligned}$$

De plus :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad \displaystyle\int_n^{n+1}tx^{t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_n^{n+1}(n+1)x^{n^2}\,\mathrm{d}t=(n+1)x^{n^2}$

et :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad \displaystyle\int_n^{n+1}tx^{t^2}\,\mathrm{d}t \ge \int_n^{n+1}nx^{(n+1)^2}\,\mathrm{d}t=nx^{(n+1)^2}$

En sommant, on en déduit :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{(n+1)^2}\le\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{e}^{t^2\ln(x)}\,\mathrm{d}t\le\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{n^2}$

puis :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)x^{n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)x^{n^2}\le\left[\frac{\mathrm{e}^{t^2\ln(x)}}{2\ln(x)}\right]_0^{+\infty}=\frac{-1}{2\ln(x)}\le\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{n^2}$

ou encore :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n^2}-f(x)\le\frac{-1}{2\ln(x)}\le\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n^2}+f(x)$

puis :

$\dfrac{-1}{2\ln(x)}-f(x)\le\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n^2}\le\frac{-1}{2\ln(x)}+f(x)$

et :

$\dfrac{1}{2}+f(x)\ln(x)\le-\ln(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n^2}\le\frac{1}{2}-f(x)\ln(x)$

Compte tenu de l'équivalent de f en 1, $-\ln(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n^2}\underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$

Remontant plus haut, on a :

$f(x)-G\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+o(1)\right)=\dfrac{1}{2}+o(1)$

ce qui donne :

$f(x)=\dfrac{G}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{2}+o(1)$

8. $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ car n et n^2 ont la même parité.
   Donc :
   $\forall x \in]-1;1[\ f(x) + f(-x) = 2\sum_{p=0}^{+\infty} x^{4p^2} = 2f(x^4)$
   Si on pose $x = -1+h$ alors :
$$\begin{aligned}
f(x) &= 2f((-1+h)^4) - f(1-h) = 2f(1-4h+6h^2+o(h^2)) - f(1-h)\\
&= 2\frac{G}{\sqrt{4h-6h^2+o(h^2)}} + 1 - \frac{G}{\sqrt{h}} - \frac{1}{2} + o(1)\\
&= \frac{G}{\sqrt{h}}\left(1 - \frac{3}{2}h + o(h)\right)^{-1/2} + \frac{1}{2} - \frac{G}{\sqrt{h}} + o(1)\\
&= \frac{G}{\sqrt{h}}\left(1 + \frac{3}{2}h + o(h)\right) - \frac{G}{\sqrt{h}} + \frac{1}{2} + o(1)\\
&= \frac{1}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

Exercice 10 *(Mines 2017)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \,\mathrm{d}t$

Correction :

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $\frac{a_n}{n!} = O\left(\frac{1}{n!}\right)$.

On en déduit $R \geq R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n\right) = +\infty$

- **Première méthode**

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-2t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \end{cases}$.

  — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue.

  — La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ (la suite des restes d'une série convergente converge vers 0).

  — La fonction nulle est continue.

  — **Domination**

  $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq M$

  $\forall t \in \mathbb{R}_+\ \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k!} t^k \leq M \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = M\,\mathrm{e}^t$

  On en déduit :

  $\forall t \in \mathbb{R}_+\ \left|\mathrm{e}^{-2t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k\right| \leq M\,\mathrm{e}^{-t}$

  avec $t \mapsto M\,\mathrm{e}^{-t}$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

  D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \,\mathrm{d}t = 0$

- **Deuxième méthode**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}\,\mathrm{e}^{-x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2} = \frac{1}{2^{n+1}} n!$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \geq n$, soit $f_k \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{a_k}{k!} t^k \,\mathrm{e}^{-2t} \end{cases}$.

— Pour tout $k \geq n$, f_k est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

— $\sum_{k \geq n} f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et la somme est continue sur $\mathbb{R}_+$: c'est la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$

— La série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge :

$$\forall k \geq n \quad \int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|a_k|}{k!}\frac{k!}{2^{k+1}} \leq \frac{M}{2^{k+1}}$$

Le théorème N_1 s'applique donc.

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \frac{a_k}{k!} t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ comme reste d'une série convergente}$$

Exercice 11 *(X 2018)*

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{(n!)^2}$.
   On note S la somme de cette série entière.
2. Montrer que $S(x) = o_{+\infty}(\mathrm{e}^x)$.

Correction

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \frac{1}{(n!)^2} > 0$
   $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$
   On en déduit que le rayon de convergence cherché est $+\infty$.
2. - **Première méthode**
     $\forall n \geq 2\ n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \geq 1 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{n-1}$
     Cette formule est encore valable pour $n = 1$ mais pas pour $n = 0$.

$$\forall x \geq 0\ 0 \leq S(x) \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n-1} n!} = 1 + 2\left(\mathrm{e}^{x/2} - 1\right) \leq 2\,\mathrm{e}^{x/2} - 1$$

On conclut facilement.

- Soit $\epsilon > 0$.
  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0$ $\dfrac{1}{n!} < \epsilon$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+ \ 0 \leq S(x) &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x^n}{(n!)^2} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x^n}{(n!)^2} + \epsilon \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x^n}{(n!)^2} + \epsilon \, \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

  $\dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x^n}{(n!)^2}}{\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc :
  $\exists x_0 > 0$ tq $\forall x \geq x_0$ $\dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x^n}{(n!)^2}}{\mathrm{e}^x} \leq \epsilon$
  D'où :
  $\forall x \geq x_0$ $0 \leq \dfrac{S(x)}{\mathrm{e}^x} \leq 2\epsilon$
  On conclut facilement.
- La deuxième méthode peut se généraliser aux hypothèses suivantes :
  (a_n) et (b_n) sont deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $a_n = o(b_n)$.
  Les rayons de convergence des deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont infinis.
  Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = o\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$.

3 Intégration terme à terme

Exercice 12 *(Centrale 2019)*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Soit $S \begin{cases} D(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$.

1. Montrer :
   $\forall r \in [0; R[$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} S\left(r \, \mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t = 2\pi a_n r^n$
2. On suppose que $R = +\infty$.
   (a) Si la fonction S est bornée sur $\mathbb{C}$ montrer qu'elle est constante.
   (b) D'autres questions non traitées.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r \in [0; R[$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-in\theta}\sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p\,\mathrm{e}^{ip\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p\,\mathrm{e}^{i(p-n)\theta}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $f_p \begin{cases} [0; 2\pi] \to \mathbb{C} \\ \theta \mapsto a_p r^p\,\mathrm{e}^{i(p-n)\theta} \end{cases}$

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p est continue sur $[0; 2\pi]$.
- $\forall p \in \mathbb{N}\ \ \|f_p\|_\infty = |a_p|\,r^p$
  C'est le terme général d'une série convergente car $r < R$.
  Donc la série de fonctions de terme général f_p converge normalement sur $[0; 2\pi]$.

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_p(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_p r^p\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(p-n)\theta}\mathrm{d}\theta\right) \\ &= a_n r^n \text{ en détaillant} \end{aligned}$$

2. (a) $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall z \in \mathbb{C}\ \ |S(z)| \leq M$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\forall r \in \mathbb{R}_+^*\ \ |a_n|\,r^n \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|S(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\mathrm{d}\theta = M$
   En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $a_n = 0$.
   Il reste :
   $\forall z \in \mathbb{C}\ S(z) = a_0$.

Exercice 13 *(Centrale maths 1 2021)*

1. Soit f la somme d'une série entière à coefficients réels de rayon de convergence strictement supérieur à 1.
   On suppose :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
   Montrer :
   $\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$
   Que peut-on en déduire ?
2. Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{(i-1)t}\,\mathrm{d}t$.
3. La suite de l'exercice ne m'est pas parvenue. Je propose la reconstitution suivante :
   En considérant I_{4n+3}, déterminer une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$, différente de la fonction nulle vérifiant :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \int_0^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Correction

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de la série entière et R son rayon de convergence :
$\forall x \in]-R;R[\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
$R>1$ donc :
$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n f(x)\right)\mathrm{d}x$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $g_n \begin{cases}[0;1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto a_n x^n f(x)\end{cases}$.
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est continue sur $[0;1]$.
   - La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0;1]$:
   f est continue sur $[0;1]$ (sans problème car $R>1$) donc f y est bornée :
   $\exists M\in\mathbb{R}_+$ tq $\forall x\in[0;1]\ \ |f(x)|\leq M$
   On a alors :
   $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in[0;1]\ \ |g_n(x)|=|a_n|\,x^n\,|f(x)|\leq M\,|a_n|$ indépendant de x et terme général d'une série convergente puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement supérieur à 1.

   On en déduit :
$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$
La fonction f^2 étant continue et positive :
$\forall x\in[0;1]\ f(x)^2=0$
puis :
$\forall x\in[0;1]\ f(x)=0$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$.
La fonction $f_n : t\mapsto t^n\,\mathrm{e}^{(i-1)t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et :
$t^2 f_n(t)=\left(t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0\right)\times\left(\mathrm{e}^{it}\text{ borné}\right)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$u(t)=t^n$, $u'(t)=nt^{n-1}$
$v'(t)=\mathrm{e}^{(i-1)t}$, $v(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{(i-1)t}}{(i-1)}$
u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$
L'intégration par parties est donc justifiée.
De plus $u(0)v(0)=0$ donc :
$\forall n\in\mathbb{N}^*\ I_n=-\int_0^{+\infty}(nt^{n-1})\left(\dfrac{\mathrm{e}^{(i-1)t}}{(i-1)}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{n}{1-i}I_{n-1}$
On en déduit :
$\forall n\in\mathbb{N}\ I_n=\dfrac{n!}{(1-i)^n}I_0=\dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}=n!2^{-(n+1)/2}\,\mathrm{e}^{i(n+1)\pi/4}$
En prenant la partie imaginaire, on en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}\ \int_0^{+\infty} t^{4n+3}\,\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t=0$
Qu'on peut écrire :
$\forall n\in\mathbb{N}\ \int_0^{+\infty} t^{4n}\,\mathrm{e}^{-t}\sin(t)t^3\,\mathrm{d}t=0$

On fait alors le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x = t^4$:
$\forall n \in \mathbb{N} \int_0^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-x^{1/4}} \sin\left(x^{1/4}\right) \mathrm{d}x = 0$
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^{1/4}} \sin\left(x^{1/4}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, a tous ses moment nuls mais n'est pas la fonction nulle.

4 Calculs de sommes à l'aide de séries entières

Exercice 14 *(X 2019)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$.
On s'aidera de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

Correction
On note $a_n = \binom{2n}{n}$.
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.
$\forall n \in \mathbb{N} \; a_n r^n > 0$
$\dfrac{a_{n+1} r^{n+1}}{a_n r^n} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \dfrac{n!n!}{(2n)!} r = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} r = 2\dfrac{2n+1}{n+1} r \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4r$
On en déduit classiquement $R = \dfrac{1}{4}$.
$\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[\; f(-x)f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2p}{p} \binom{2n-2p}{n-p} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$
mais que vaut $f(x)$?
Dans la recherche du rayon de convergence, on a obtenu :
$\forall n \in \mathbb{N} \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2\dfrac{2n+1}{n+1}$
ou encore :
$\forall n \in \mathbb{N} \; (n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[\; f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^n = 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= 4x f'(x) + 2f(x)
\end{aligned}$$

f est solution de l'équation différentielle $(1-4x)y' = 2y$ et $f(0) = 1$.
La résolution est standard et :

$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\ \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n &= f(x)f(-x)=\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-4(4x^2)}}=f(4x^2)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}4^k x^{2k}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \begin{cases} w_{2n+1}=0\\ w_{2n}=\binom{2n}{n}4^n\end{cases}$$

5 Relations de récurrence et séries entières

Exercice 15 *(CCP 2022)*

Soit $\varphi\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t-1}\end{cases}$.

1. On admet que $\varphi(t)=1+t+t^2+\frac{5}{6}t^3+o_{t\to 0}(t^3)$. Déterminer $\varphi^{(n)}(0)$ pour $n\in[\![0;3]\!]$.
2. On définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k$.
   (a) Calculer p_1, p_2 et p_3.
   (b) Montrer :
   $\forall n\in\mathbb{N}\ p_n\leq n!$
3. On définit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p_n}{n!}x^n$.
   (a) Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est strictement positif.
   (b) On admet que :
   $\forall x\in]-R;R[\ f'(x)=\mathrm{e}^x f(x)$
   Montrer :
   $\forall n\in\mathbb{N}\ p_n=\varphi^{(n)}(0)$
4. Montrer :
   $\forall x\in]-R;R[\ f'(x)=\mathrm{e}^x f(x)$
5. Soit P_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.
   Montrer :
   $\forall n\in\mathbb{N}\ P_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k$.

Correction

1. Par unicité du développement limité, on obtient avec la formule de Taylor-Young :
   $\varphi(0)=\varphi'(0)=1$, $\varphi''(0)=2$ et $\varphi^{(3)}(0)=5$.

2. (a) $p_1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} p_k = p_0 = 1.$
$p_2 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} p_k = p_0 + p_1 = 2.$
$p_3 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} p_k = p_0 + 2p_1 + p_2 = 5.$
On remarque :
$\forall n \in [\![0;3]\!]\ p_n = \varphi^{(n)}(0)$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0;n]\!]\ p_k \leq k!$.
$\mathcal{P}(3)$ est vraie.
On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour n entier supérieur ou égal à 3.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} = n! \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \\ &\leq n! \sum_{l=0}^{n} 1 = n! \times (n+1) \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \left|\frac{p_n}{n!}\right| = \frac{p_n}{n!} \leq 1 = |1|$
On en déduit :
$R \geq R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = 1$

(b) On résout l'équation différentielle :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]-R;R[; f(x) = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$
$f(0) = p_0 = 1$ donne $1 = C\,\mathrm{e}$ donc $C = \mathrm{e}^{-1}$.
On en déduit :
$\forall x \in]-R;R[\ f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1} = \varphi(x)$
φ est donc développable en série entière et pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient de x^n dans le développement en série entière de φ est $\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$.
Par unicité des coefficients d'une série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(0) = p_n$.

4.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R;R[\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{p_k}{k!} \right) x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n \right) \\ &= \mathrm{e}^x f(x) \end{aligned}$$

5. Soit un ensemble X. Un ensemble de parties de X est une partition de X si :

i aucune de ces parties n'est vide

ii leur union est égale à X

iii elles sont deux à deux disjointes

En particulier, il n'y a pas de partition de l'ensemble vide.
Pour fabriquer une partition de l'ensemble $[\![1;n+1]\!]$, on prend le premier élément, on lui adjoint $k \in [\![0;n-1]\!]$ éléments de $[\![2;n+1]\!]$ et on partitionne les $(n+1)-(k+1) = n-k > 0$ restants.
On ajoute ensuite la partition constituée du seul ensemble $[\![1;n+1]\!]$.
D'où $P_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} P_{n-k} + 1 = \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{n-l} P_l + \binom{n}{0} P_0 = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} P_l$.

Exercice 16 *(Mines 2022)*

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx)\, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\, \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.
   On donne $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ I_n = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}$
3. Développer F en série entière.
4. Exprimer F à l'aide des fonctions usuelles

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   La fonction $f_x \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et :
   $\forall t \geq 1\ |f_x(t)| \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-t}$ avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. On peut commencer par remarquer que les intégrales I_n sont bien définies :
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   La fonction $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{2n}\, \mathrm{e}^{-t^2} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et :
   $t^2 f_n(t) = t^{2n+2}\, \mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : I_n = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}$
   $\mathcal{P}(\prime)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n+2}\, \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{2n+1}\, t\, \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$
   $u(t) = t^{2n+1}$, $u'(t) = (2n+1)t^{2n}$
   $v'(t) = t\, \mathrm{e}^{-t^2}$, $v(t) = -\dfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-t^2}$
   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) = -\dfrac{1}{2} t^{2n+1}\, \mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

L'intégration par parties est justifiée.
Comme $u(0)v(0) = 0$, on a directement :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+1}{2}\int_0^{+\infty} t^{2n}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2n+1}{2}\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)}\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!} \\ &= \frac{(2n+2)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+3}(n+1)!} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3. $\forall x \in \mathbb{R}\ F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n} t^{2n}\,\mathrm{e}^{-t^2}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t.$

   On fixe $x \in \mathbb{R}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{(-1)^n x^{2n} t^{2n}\,\mathrm{e}^{-t^2}}{(2n)!} \end{cases}$

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   - La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
   - La fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
   - La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge :

     $\forall n \in \mathbb{N}\ \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n}}{(2n)!}I_n = \frac{x^{2n}\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$

     La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ converge (sa somme est $\mathrm{e}^{x^2/2}$)

   D'après le théorème N1 :

   $\forall x \in \mathbb{R}\ F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{I_n}{(2n)!}$

   La fonction F est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

4.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{I_n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^n \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2/4} \end{aligned}$$

6 Fonctions développables en série entière

Exercice 17

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Développer en série entière la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-z}$.

Correction
f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ si $x \in \mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$ si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R} \setminus \{z\}$ si $z \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ (ce qui est la situation du programme).

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-|z|\,|z|[\ f(x) &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-x/z} \quad (z \neq 0)\\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n \quad (R = |z|)\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{z^{n+1}} \quad (R = |z|)
\end{aligned}$$

Exercice 18 *(Mines 2014)*

Développer en série entière la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Correction

- **Première méthode**
  $\dfrac{1}{X^2+X+1} = \dfrac{1}{(X-j)(X-j^2)} = \dfrac{a}{X-j} + \dfrac{b}{X-j^2}$
  On multiplie par $X-j$ et on évalue en j : $a = \dfrac{1}{j-j^2} = \dfrac{1}{2i\Im m(j)} = \dfrac{1}{i\sqrt{3}} = -\dfrac{i\sqrt{3}}{3}$
  $b = \overline{a} = \dfrac{i\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ f(x) &= \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{x-j^2} - \frac{1}{x-j}\right)\\
&= \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{-j^2}\frac{1}{1-jx} + \frac{1}{j}\frac{1}{1-j^2x}\right)\\
&= \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(-j\sum_{n=0}^{+\infty} j^n x^n + j^2\sum_{n=0}^{+\infty} j^{2n}x^n\right)\\
&= \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} j^{n+1}x_n + \sum_{n=0}^{+\infty}\overline{j}^{n+1}x^n\right)\\
&= \frac{i\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-2i\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n
\end{aligned}$$

  Les calculs précédents assurent que la série converge donc $R \geq 1$.
  La suite $\left(\sin\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge : elle est périodique de période 3 et prend les valeurs $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ et 1.
  Donc $R \leq 1$.
  Finalement, $R = 1$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}\forall x \in]-1;1[\ f(x) & = & \dfrac{1-x}{1-x^3} \\ & = & (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\end{array}$$

avec :

* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{3n} = 1$
* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{3n+1} = -1$
* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{3n+2} = 0$

Le rayon de convergence vaut 1 car il y a divergence grossière pour $x = 1$.

Exercice 19

Développer en série entière la fonction : $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2-x}{3-x^2}\right)$.

Correction

A l'aide d'un tableau de signe, on trouve $\mathcal{D}_f =]-\sqrt{3};\sqrt{3}[\cup]2;+\infty[$.
On se limite évidemment à $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$.

$$\begin{array}{rcl}\forall x \in]-\sqrt{3};\sqrt{3}[\ f(x) & = & \ln\left(\dfrac{2-x}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}\right) \\ & = & \ln(2-x) - \ln(\sqrt{3}-x) - \ln(\sqrt{3}+x) \\ & = & \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right) - \ln\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) - \ln\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) \\ & = & \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n2^n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{3}^n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n\sqrt{3}^n} \\ & = & \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\left(-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{\sqrt{3}^n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{3}^n}\right)\end{array}$$

Le minimum des trois rayons de convergence est $\sqrt{3}$ mais il y en a deux égaux.
Pour $x = \sqrt{3}$, la série diverge donc $R = \sqrt{3}$.

Exercice 20

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x$.

Correction

On linéarise $\cos^3 x$:

$$\begin{array}{rcl}\forall x \in \mathbb{R}\ \cos^3(x) & = & \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(e^{3ix}+3\,e^{ix}+3\,e^{-ix}+e^{-3ix}\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)\end{array}$$

On en déduit :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \cos^3 x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(9^n+3)}{4\ (2n)!}x^{2n} \quad (R=+\infty)$

Exercice 21 *(Centrale 2016)*

Soit f définie quand c'est possible par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)$$

1. Trouver J, intervalle ouvert, sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et montrer que f est solution d'une équation différentielle du second ordre.
2. Montrer qu'il existe $R>0$ tel que :
   $\forall x \in]-R;R[\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{2k+1}$
   Le candidat n'a pas eu le temps de terminer mais il semble qu'on attendait la valeur de R et une expression des coefficients.

Correction

1. A cause des propriétés de la fonction arcsin, f est définie et continue sur $[-1;1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.
   Remarque :
   L'examinateur s'est montré pointilleux sur la justification.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1;1[\ f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\cos\left(\frac{\arcsin x}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cos\left(\frac{\arcsin x}{3}\right) \\ f''(x) &= -\frac{1}{6}(-2x)\left(1-x^2\right)^{-3/2}\cos\left(\frac{\arcsin x}{3}\right) - \frac{1}{9}\left(1-x^2\right)^{-1}\sin\left(\frac{\arcsin x}{3}\right) \\ &= \frac{x}{1-x^2}f'(x) - \frac{1}{9(1-x^2)}f(x) \end{aligned}$$

   f est donc solution sur $]-1;1[$ de (E) $9(1-x^2)y''-9xy'+y=0$.
2. On considère une série entière de la forme $\sum_{k\geq 0} a_k x^{2k+1}$ de rayon de convergence $R>0$ et on note S sa somme.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R;R[\ S'(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)a_k x^{2k} \\ S''(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(2k+1)(2k)a_k x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+3)(2k+2)a_{k+1}x^{2k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R;R[\\
\iff & \forall x \in]-R;R[\ 9\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+3)(2k+2)a_{k+1}x^{2k+1} - 9\sum_{k=1 \text{ puis } k=0}^{+\infty}(2k+1)(2k)a_kx^{2k+1} \\
& -9\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)a_kx^{2k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^{2k+1} = 0 \\
\iff & \forall x \in]-R;R[\ \sum_{k=0}^{+\infty}\left((9(2k+3)(2k+2)a_{k+1} + \left(1-9(2k+1)^2\right)a_k\right)x^{2k+1} = 0 \\
\iff & \forall k \in \mathbb{N}\ a_{k+1} = \frac{(3(2k+1)-1)\,(3(2k+1)+1)}{9(2k+3)(2k+2)}a_k = \frac{(6k+2)(6k+4)}{9(2k+3)(2k+2)}a_k \\
\iff & \forall k \in \mathbb{N}^*\ a_k = \frac{(6k-2)(6k-4)}{9(2k+1)2k}a_{k-1} \\
\iff & \forall k \in \mathbb{N}^*\ a_k = \frac{1}{9^k(2k+1)!}\left(\prod_{l=1}^{k}(6l-4)(6l-2)\right)a_0
\end{aligned}$$

On prend $a_0 = f'(0) = \dfrac{1}{3}$ et on pose donc :

$\forall k \in \mathbb{N}^*\ a_k = \dfrac{1}{3^{2k+1}(2k+1)!}\left(\displaystyle\prod_{l=1}^{k}(6l-4)(6l-2)\right)$.

Soit $r > 0$.

- $\forall k \in \mathbb{N}\ a_kr^{2k+1} > 0$
- $\dfrac{a_{k+1}r^{2k+3}}{a_kr^{2k+1}} = r^2\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = r^2\dfrac{(6k+2)(6k+4)}{9(2k+3)(2k+2)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} r^2$

On en déduit que $R = 1$.

f et la somme de la série entière sont donc solutions sur $]-1;1[$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} 9(1-x^2)y'' - 9xy' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Les hypothèses du théorème de Cauchy étant vérifiées sur $]-1;1[$, f est bien développable en série entière.

Reste à calculer les coefficients a_k.

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{k}(6l-4)(6l-2) &= 2^{2k}\prod_{l=1}^{k}(3l-2)(3l-1) = \frac{2^{2k}}{\prod\limits_{l=1}^{k}3l}\prod_{l=1}^{k}(3l-2)(3l-1)(3l) \\
&= \frac{2^{2k}}{3^kk!}(3k)!
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ a_k = \frac{2^{2k}(3k)!}{3^{3k+1}k!(2k+1)!}}$$

Exercice 22 *(Centrale 2019, Mines 2021, 2023)*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-a,a[$.
On suppose :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in\ [0,a[,\ f^{(n)}(x) \geq 0$.

1. Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et $x \in]0;a[$.
   On note $R_n(x)$ le reste.
2. En déduire que la série de Taylor de f converge pour tout $x \in\ ]0,a[$.
3. Soit x, y tels que $0 < x < y < a$. Montrer qu'on a $R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$. En déduire que f est égale à la somme de sa série de Taylor.
4. Montrer que tan est développable en série entière sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
5. Cette question n'avait pas été posée en 2019.
   On pose $\tan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Montrer que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$

Correction

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in]-a;a[\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$ avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$
2. Si $x \in]0;a[$, $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est une série à termes positifs.
   Compte tenu des hypothèses :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ R_n(x) \geq 0$
   et :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x)$
   Donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge.
   On en déduit ensuite que la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. On fait le changement de variable $t = xu$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]0;a[\ R_n(x) &= \int_0^1 \frac{(x-xu)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) x\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

   $f^{(n+2)} \geq 0$ sur $[0;a[$ donc $f^{(n+1)}$ est croissante sur $[0;a[$.
   Soit x, y tels que $0 < x < y < a$.
   $\forall u \in [0;1]\ f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(yu)$
   Donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n+1)}(yu)\,\mathrm{d}u = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$
   La suite $(R_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc :
   $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, et ce pour tout $x \in]0; a[$.
C'est évidemment trivial pour $x = 0$.

4. On montre par récurrence forte :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \tan^{(n)}(x) \geq 0$.
La propriété est vraie pour $n = 0$: $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \tan(x) \geq 0$.
La propriété est vraie pour $n = 1$: $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 0$.
On suppose la propriété vraie jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}^*$ ($n \geq 1$ à cause de la dérivation du terme constant 1).
$\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$
Donc par la formule de Leibniz :
$\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \tan^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\tan^{(k)}(x) \geq 0\right) \left(\tan^{(n-k)}(x) \geq 0\right) \geq 0$
D'après ce qui précède :
$\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[\ \tan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$
On conclut par parité.

5. $a_0 = \tan(0) = 0$ et $a_1 = \tan'(0) = 1$
$\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$
On en déduit en faisant un produit de Cauchy :
$\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n$
On conclut facilement.

Exercice 23 *(Mines 2016)*

Domaine de définition de $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$?
g est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Correction
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x < -1$ alors $-x > 1$ et $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ n'est pas continue sur $]1; +\infty[$. On ne peut pas définir $g(x)$.
Si $x = -1$ alors, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est continue sur $]1; +\infty[$ mais $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{-1+t} \sim_1 \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{t-1} \geq 0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{-1+t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
Enfin, si $x > -1$ alors $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et est négligeable devant e^{-t} en $+\infty$.
Donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.
Finalement, le domaine de définition de g est $]-1; +\infty[$.

Soit $x \in]-1;1[$ fixé.

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \frac{\mathrm{d}t}{1+x/t} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{t^n} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{t^{n+1}} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto (-1)^n \dfrac{x^n}{t^{n+1}} \, \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue et intégrable sur $[1;+\infty[$.
- $\sum g_n$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ et sa somme, g, est continue sur $[1;+\infty[$.
- $\forall n \in \mathbb{N} \displaystyle\int_1^{+\infty} |g_n(t)| \, \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{|x|^n}{t^{n+1}} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \leq |x^n| \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$

On peut appliquer le théorème N1 et :

$$\forall x \in]-1;1[\; g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}} \, \mathrm{d}t$$

Cela suffit pour montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0. On peut se demander si $R = 1$. Avec une IPP on doit pouvoir obtenir une relation de récurrence qui permet de conclure.
On peut aussi remarquer que si $R > 1$, alors g a une limite finie en -1 et il ne doit pas être trop compliqué de montrer que ce n'est pas le cas.

Autre méthode (suggérée par l'examinateur ?)

Soit $f \begin{cases}]-1;+\infty[\times [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \end{cases}$.

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x et :
  $\forall (x,t) \in]-1;+\infty[\times [1;+\infty[\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}$
- Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x,.)$ est continue et intégrable sur $[1;+\infty[$.
- Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est continue sur $[1;+\infty[$.
- L'hypothèse de domination relative à $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est vérifiée sur tout segment inclus dans $]-1;+\infty[$:
  Soit $[a,b]$ $(-1 < a < b)$ un segment inclus dans $]-1;+\infty[$.
  $\forall (x,t) \in [a;b] \times [1;+\infty[\; \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(a+1)^2}$
  avec $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(a+1)^2}$ continue et positive et intégrable sur $[1;+\infty[$.

g est donc $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ avec :
$\forall x > -1 \; g'(x) = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2} \, \mathrm{d}t$
Une IPP facile à justifier donne alors :

$\forall x > -1\ g'(x) = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\right]_1^{+\infty} + \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{x+1} + g(x)$

g est donc solution sur $]-1;+\infty[$ de $y' - y = -\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{x+1}$

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S sa somme.
Soit $R_1 = \min(R, 1)$.

$$\begin{aligned}
& S \text{ solution sur }]-R_1;R_1[\text{ de } y' - y = -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+1} \\
\iff\ & \forall x \in]-R_1;R_1[\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \\
\iff\ & \forall n \in \mathbb{N}\ (n+1)a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-1} \\
\iff\ & \forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} = \frac{a_n + (-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-1}}{n+1}
\end{aligned}$$

Il faut vérifier que $R > 0$.
$\forall n \geq 1\ \ |a_{n+1}| \leq \dfrac{|a_n| + 1}{2}$
Si on pose $M = \max(1, |a_0|, |a_1|)$ alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \ |a_n| \leq M$
On en déduit que $R \geq 1$.
En fait $R = 1$ car $R \leq R_{CV}(S' - S) = R_{CV}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{x+1}\right) = 1$.
Moyennant les justifications habituelles, g est DSE sur $]-1;1[$.
$a_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ qui ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles.

Exercice 24 *(Mines 99)*

Soit $f \begin{cases}]-\pi/2;\pi/2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$

1. Trouver un $DL_2(0)$ de f.
2. On suppose que f se développe en série entière sur $]-R;R[$, $R > 0$.
   - Pourquoi peut-on écrire $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$?
   - Trouver une relation de récurrence entre les a_n (on écrira que $f(x) \times \cos x = 1$).
3. Montrer qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq \rho^n$
4. - Montrer que f se développe en série entière sur $]-R;R[$ avec $R > 0$.
   - Majorer R.

Correction
f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1 - x^2/2 + o(x^2/2)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$

2. • f est paire

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-R;R[\ f(x)\times\cos(x)=1 &\iff \forall x \in]-R;R[\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)=1\\
&\iff \forall x \in]-R;R[\ 1=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} a_l x^{2l}\frac{(-1)^{n-l}x^{2n-2l}}{(2(n-l))!}\right)\\
&\iff \forall x \in]-R;R[\ 1=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^{2n}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}a_l}{(2n-2l)!}\right)\\
&\iff \begin{cases} a_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ a_n=-\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-l}a_l}{(2n-2l)!}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k a_{n-k}}{(2k)!}\end{cases}
\end{aligned}$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n):\forall k\in[\![0;n]\!]\ |a_k|\le\rho^k$
$a_0=1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai pour tout choix de ρ, qu'on diffère.
On suppose que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k a_{n-k}}{(2k)!}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^{n-k}}{(2k)!}=\rho^n\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^{-k}}{(2k)!}\\
&\le \rho^n\sum_{k=1}^{n}\rho^{-k}\le\rho^n\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^{-k}\text{ si }\rho>1\\
&\le \frac{\rho^n}{\rho-1}
\end{aligned}$$

Donc $\rho=2$ convient.
On peut être plus précis :

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k a_{n-k}}{(2k)!}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^{n-k}}{(2k)!}=\rho^n\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^{-k}}{(2k)!}\\
&\le \frac{\rho^n}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho^{-k}\le\frac{\rho^n}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^{-k}\text{ si }\rho>1\\
&\le \frac{\rho^n}{2(\rho-1)}
\end{aligned}$$

et $\rho=\dfrac{3}{2}$ convient.

On peut être encore plus précis :

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k a_{n-k}}{(2k)!}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^{n-k}}{(2k)!}=\rho^n\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^{-k}}{(2k)!}\\
&\le \rho^n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1/\sqrt{\rho})^{2k}}{(2k)!}=\rho^n\left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)-1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)-1\leq 1 &\iff \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)\leq 2\\
&\iff \frac{1}{\sqrt{\rho}}\leq \operatorname{argch}(2)=\ln(2+\sqrt{3})\\
&\iff \rho\geq \frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})^2}\simeq 0,57658
\end{aligned}$$

4. $R_{CV}\left(\sum a_n x^{2n}\right) \geq R_{CV}\left(\sum \rho^n x^{2n}\right) = R_{CV}\left(\sum (\sqrt{\rho}x)^{2n}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\rho}} = \ln(2+\sqrt{3}) \simeq 1,31696$

   On pose $S\begin{cases}]R;R[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}\end{cases}$: pas de problème, on vient de voir $R>0$.
   $\forall x\in]-R;R[\ S(x)\times\cos(x)=1$
   Donc :
   $\forall x\in]-R;R[\cap\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\ S(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$
   Donc :
   $\forall x\in]-R;R[\cap\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n}$
   Si on avait $R>\dfrac{\pi}{2}$, on aurait $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\times 0=1$. C'est absurde donc $R\leq\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 25 *(Centrale)*

On pose $F_x(t)=\mathrm{e}^{xt-t^2/2}$.

1. Montrer que F_x est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que :
   $\forall t\in\mathbb{R}\ F_x(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$
   où : $\forall n\in\mathbb{N}\ P_n\in\mathbb{R}[X]$.
2. Trouver une relation entre P_{n-1}, P_n et P_{n+1}.
3. En déduire que :
   $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R}\ P_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n!}\mathrm{e}^{x^2/2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)$

Correction

1. On fixe $x\in\mathbb{R}$.
   $\forall t\in\mathbb{R}\ \mathrm{e}^{tx}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n x^n}{n!}$ $(R=+\infty)$
   $\forall t\in\mathbb{R}\ \mathrm{e}^{-t^2/2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n t^n$ $(R=+\infty)$
   D'après le cours sur les produits de séries entières :
   $\forall t\in\mathbb{R}\ \mathrm{e}^{tx-t^2/2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$
   avec :
   $\forall n\in\mathbb{N}\ P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{b_{n-k}}{k!}x^k$

2. On fixe toujours x.
$\forall t \in \mathbb{R}\ F_x'(t) = (x-t)\,\mathrm{e}^{xt-t^2/2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(x)t^{n-1}$
$\forall t \in \mathbb{R}\ x\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} P_{n-1}(x)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n$
$\forall t \in \mathbb{R}\ xP_0(x) - P_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(xP_n(x) - P_{n-1}(x) - (n+1)P_{n+1}(x)\right)t^n = 0$
Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}\ P_1(x) = xP_0(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ (n+1)P_{n+1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x) = 0$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$:
$\forall k \in [\![0;n]\!]\ \forall x \in \mathbb{R}\ P_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{d^k}{dx^k}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)$
$\forall x \in \mathbb{R}\ P_0(x) = F_x(0) = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}\ \frac{(-1)^0}{0!}\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{d^0}{dx^0}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) = 1 \times\ \mathrm{e}^{x^2/2} \times\ \mathrm{e}^{-x^2/2} = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}\ P_1(x) = xP_0(x) = x$
$\forall x \in \mathbb{R}\ \frac{(-1)^1}{1!}\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{d^1}{dx^1}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) = -\,\mathrm{e}^{x^2/2}\left(-x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) = x$
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ P_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1}\left(x\ \frac{(-1)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(n+1)!}\left(-x\ \frac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) - n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(n+1)!}\left(\binom{n}{0}\frac{d^0}{dx^0}(-x)\frac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) + \binom{n}{1}\frac{d^1}{dx^1}(-x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) + \dots\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(n+1)!}\frac{d^n}{dx^n}\left(-x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) \quad \text{Leibnitz}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(n+1)!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Et on conclut facilement.

Exercice 26 *(Mines 2016)*

Montrer l'existence d'une unique suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on explicitera, tels que :
$\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)t^n$
Donner les propriétés de cette suite.

7 Etudes de sommes de séries entières

Exercice 27

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3n-1}{n+3}x^n$.

Correction
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \dfrac{n^2+3n-1}{n+3}r^n > 0$
$\dfrac{\dfrac{(n+1)^2+3(n+1)-1}{n+4}r^{n+1}}{\dfrac{n^2+3n-1}{n+3}r^n} = \dfrac{(n+1)^2+3(n+1)-1}{n^2+3n-1}\dfrac{n+3}{n+4}r \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$ (quotient des coefficients dominants)
Si $r<1$, la série $\sum \dfrac{n^2+3n-1}{n+3}r^n$ converge.
Si $r>1$, la série $\sum \dfrac{n^2+3n-1}{n+3}r^n$ diverge.
Donc $R=1$.
Pour $x=\pm 1$, il y a divergence grossière.
Le domaine de convergence est donc $]-1;1[$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \dfrac{n^2+3n-1}{n+3} = n - \dfrac{1}{n+3}$
$\forall x \in]-1;1[\ S(x) = S_1(x) - S_2(x)$
avec :
$\forall x \in]-1;1[\ S_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ (le rayon de convergence est égal à 1)
et :
$\forall x \in]-1;1[\ S_2(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+3}$ (le rayon de convergence est égal à 1)

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ S_1(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\
&= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\
&= \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ x^3S_2(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \\
&= -\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in]-1;1[\setminus\{0\} \ S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2}}{x^3}$$

$S(0) = -\dfrac{1}{3}$ directement avec la somme.

Exercice 28 *(CCP 2022)*

$\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)} x^{2n}$

1. Montrer que S est bien définie et dérivable.
   Que vaut $S'(x)$?
2. Calculer $S(x)$.

Correction

1. On note $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n(2n-1)}$.
   Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n r^{2n} \neq 0$.
   $\dfrac{|a_{n+1} r^{2n+2}|}{|a_n r^{2n}|} = \dfrac{2n(2n-1)}{(2n+2)(2n+1)} r^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} r^2$.
   On en déduit :
   - Si $r < 1$ alors la série de terme général $a_n r^{2n}$ converge absolument.
   - Si $r > 1$, $|a_n r^{2n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série de terme général $a_n r^{2n}$ diverge grossièrement.

   Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1.
   Sa somme est donc définie sur $]-1,1[$ indéfiniment dérivable terme à terme.
   On peut remarquer que $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc les séries de termes généraux $a_n 1^{2n}$ et $a_n(-1)^{2n}$ converge absolument.
   La fonction S est donc définie sur $[-1;1]$. On montre facilement qu'il y a convergence normale sur $[-1,1]$ et donc que S est continue sur $[-1;1]$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1} x^{2p+1} \\
S''(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} x^{2p} = -\sum_{p=0}^{+\infty} (-x^2)^p \\
&= \frac{-1}{1+x^2} \\
S'(x) &= S'(0) + \int_0^x S''(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= -\arctan(x)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ S(x) &= S(0) + \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left[t\arctan(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)
\end{aligned}$$

Exercice 29 *(Mines 2005, X 2014)*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n}\, x^n$.

Correction

- $\forall n\in\mathbb{N}^*\ a_{2n}=2\,n>0$.
  $\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}}=\dfrac{n+1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$
  Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} a_{2n}\,x^{2n}$ vaut $R_P=1$
- $\forall n\in\mathbb{N}\ a_{2n+1}=\dfrac{1}{2\,n+1}>0$.
  $\dfrac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}}=\dfrac{2\,n+1}{2\,n+3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$
  Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}\,x^{2n+1}$ vaut $R_I=1$ Classiquement, même s'il faudrait le redémontrer : $R=\min\left(R_P,R_I\right)$. Donc ici, $R=1$.
-

$$\begin{aligned}
\forall t\in]-1,1[\ \sum_{n=0}^{+\infty} t^n &= \frac{1}{1-t}\\
\forall t\in]-1,1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} n\,t^{n-1} &= \frac{1}{(1-t)^2} \text{ en dérivant}\\
\forall t\in]-1,1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} n\,t^{n} &= \frac{t}{(1-t)^2}\\
\forall x\in]-1,1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{2n} &= \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\\
\forall x\in]-1,1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}\,x^{2n} &= \frac{2\,x^2}{(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x\in]-1,1[\ S_I(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}\,x^{2n+1} \text{ c'est une définition}\\
\forall x\in]-1,1[\ S_I(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2\,n+1}\\
\forall x\in]-1,1[\ S_I'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2\,n}=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\\
\forall x\in]-1,1[\ S_I(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)\right)=\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall x\in]-1,1[\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,x^n=\frac{2\,x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Remarque :
En $x=\pm 1$, la série diverge grossièrement.

Exercice 30 *(Mines 2016)*

On considère $\sum \dfrac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$.

1. Rayon de convergence ?
2. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$.

   Continuité en 1 ?
3. Calculer $f(x)$ puis déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Correction

1. On note $a_n = \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$.
   Soit $r > 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |a_n| r^{4n+1} > 0$.
   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4n+1}{4n+5} r^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} r^4$.
   Si $r < 1$ alors $r^4 < 1$ et $\sum a_n r^{4n+1}$ converge absolument.
   Si $r > 1$ alors $r^4 > 1$ et $\sum a_n r^{4n+1}$ diverge grossièrement.
   On a donc $R = 1$.
2. On a $]-1;1[\subset \mathcal{D}_f \subset [-1;1]$.
   - La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{4n+1}$ est alternée.
   - La suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{4n+1}\right|\right)$ est décroissante.
   - La suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{4n+1}\right|\right)$ converge vers 0.

   On en déduit que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{4n+1}$ converge.
   Donc $1 \in \mathcal{D}_f$, ainsi que -1 par parité.
   Donc $\mathcal{D}_f = [-1;1]$. De plus f est impaire.

   Soit $x \in [0;1]$.
   - La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{4n+1}$ est alternée.
   - La suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}\right|\right)$ est décroissante.
   - La suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}\right|\right)$ est décroissante.

   Donc $|R_n(x)| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \dfrac{x^{4n+5}}{4n+5} \leq \dfrac{1}{4n+5}$ indépendant de x et converge vers 0.
   Donc la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0;1]$.
   Donc la série entière converge uniformément sur $[0;1]$ (et même sur $[-1;1]$ avec la parité).
   On en déduit que f est continue en 1.
3. $\forall x \in]-1;1[\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$
   Comme $f(0) = 0$, on a :

$\forall x \in]-1;1[\ f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$
Compte tenu de la continuité de f en 1, on en déduit :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$
L'examinatrice s'est contentée de demander au candidat comment il ferait pour intégrer (il restait peu de temps).
L'examinatrice attendait une décomposition en éléments simples : c'est hors-programme, surtout sur un exemple non trivial comme celui-ci.