SAVOIRS-FAIRE
Décomposition en éléments simples

941

On considère une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes.
On suppose que cette fraction ne peut pas être simplifiée, ce qui revient à supposer que P et Q n'ont pas de racine complexe commune.
On suppose que Q n'est pas constant.
Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on fait la division euclidienne de P par Q : $P = AQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$ et $F = A + \dfrac{R}{Q}$.
On peut donc dans la suite, et sans perte de généralité supposer que le degré de P est strictement inférieur à celui de Q.
Si Q est scindé, ce qui est le cas si on travaille dans $\mathbb{C}$, Q s'écrit $Q(X) = C\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - z_k)^{\alpha_k}$ où les z_k sont deux à deux distincts.
La décomposition en éléments simples de F est alors :

$$F(X) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{\alpha_k}\frac{\lambda_{k,l}}{(X - z_k)^l}\right)$$

Dans le cas où P est à coefficients réels et où Q est un polynôme à coefficients réels avec des racines réelles $x_1, \ldots, x_p$ de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et des racines complexes conjuguées z_1 et $\overline{z_1}$ de multiplicités β_1.... la décomposition en éléments simples réels de F s'écrit :

$$F(X) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{\alpha_k}\frac{\lambda_{k,l}}{(X - x_k)^l}\right) + \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{l=1}^{\beta_k}\frac{\mu_{k,l}X + \nu_{k,l}}{\left(X^2 - (z_k + \overline{z_k})X + |z_k|^2\right)^l}\right)$$

où le polynôme $X^2 - (z_k + \overline{z_k})X + |z_k|^2$ n'est autre que le polynôme $(X - z_k)(X - \overline{z_k})$.

Le cas le plus simple est celui où Q est de degré 2 avec deux racines simples :
$F = \dfrac{aX + b}{c(X - z_1)(X - z_2)} = \dfrac{\lambda_1}{X - z_1} + \dfrac{\lambda_2}{X - z_2}$
On multiplie F par $X - z_1$: $\dfrac{aX + b}{c(X - z_2)} = \lambda_1 + (X - z_1)\dfrac{\lambda_2}{X - z_2}$
Si on évalue en z_1 cela donne la valeur de λ_1.
On trouve de même la valeur de λ_2.
Si Q est scindé à racines simples : $z_1, \ldots, z_n$ alors :

$$F = \frac{P(X)}{c\prod\limits_{k=1}^{n}(X - z_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{X - z_k}$$

La même technique donne :$\lambda_k = \dfrac{P(z_k)}{c\prod\limits_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n}(z_k - zl)}$

mais le produit est peu engageant.

Mais $Q'(X) = c\sum\limits_{l=1}^{n}\left(\prod\limits_{\substack{r=1\\r\neq l}}^{n}(X - z_r)\right)$ donc $c\prod\limits_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n}(z_k - zl) = Q'(z_k)$.

On peut donc écrire :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)(X - z_k)}$$

Par exemple : $\dfrac{1}{X^n - 1} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2i(n-1)k\pi/n}\left(X - \mathrm{e}^{2ik\pi/n}\right)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}}{X - \mathrm{e}^{2ik\pi/n}}$

Donc :

$\dfrac{1}{X^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X - 1} - \dfrac{1}{X + 1}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X^3 - 1} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X - 1} + \frac{j}{X - j} + \frac{j^2}{X - j^2}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X - 1} + \frac{j(X - j^2) + j^2(X - j)}{(X - j)(X - j^2)}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X - 1} - \frac{X + 2}{X^2 + X + 1}\right)
\end{aligned}$$

On a également pour $Q = c\prod\limits_{k=1}^{n}(X - z_k)$ scindé à racines simples :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q(X)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{Q'(z_k)(X - z_k)}\\
\frac{Q'(X)}{Q(X)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X - z_k}
\end{aligned}$$

Si P est à coefficients réels et si Q est à coefficients réels sans racine multiple l'exemple de $\dfrac{1}{X^3 - 1}$ montre ce qu'il faut faire : décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis regrouper judicieusement les termes.

On peut gagner du temps en remarquant que le coefficient de $\dfrac{1}{X - \overline{z_k}}$ est le conjugué de celui de $\dfrac{1}{X - z_k}$.

Passons au cas où Q a des racines multiples.

Le cas simple est celui où $F(X) = \dfrac{P(X)}{c(X - z_1)^2(X - z_2)}$ avec $z_1 \neq z_2$.

$F = \dfrac{\lambda_1}{X - z_1} + \dfrac{\mu_1}{(X - z_1)^2} + \dfrac{\lambda_2}{X - z_2}$.

On obtient λ_2 par l a même technique que précédemment.

On multiplie par $(X - z_1)^2$ et on évalue en z_1 : on a la valeur de μ_1.

On multiplie par X et on fait tendre X vers $+\infty$: on a la valeur de λ_1.

Si on veut être plus général :

$$F(X) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{\alpha_k} \frac{\lambda_{k,l}}{(X - z_k)^l} \right)$$

$h^{\alpha_k} F(z_k + h) = \sum_{l=1}^{\alpha_k} \lambda_{k,l} h^{\alpha_k - l} + O\left(h^{\alpha_k}\right)$
et on détermine les $\lambda_{k,l}$ en effectuant un développement limité de $h^{\alpha_k} F(z_k + h)$ à l'ordre $\alpha_k - 1$.

Dans le cas réel :

$$F(X) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{\alpha_k} \frac{\lambda_{k,l}}{(X - x_k)^l} \right) + \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{\mu_{k,l} X + \nu_{k,l}}{\left(X^2 - (z_k + \overline{z_k})X + |z_k|^2\right)^l} \right)$$

on détermine les $\lambda_{k,l}$ comme ci-dessus.
En multipliant par $\left(X^2 - (z_k + \overline{z_k})X + |z_k|^2\right)^{\beta_k}$ et en évaluant en z_k on obtient $\mu_{k,\beta_k} z_k + \nu_{k,\beta_k}$
z_k étant complexe non réel, μ_{k,β_k} et ν_{k,β_k} étant réels, cela permet de calculer μ_{k,β_k} et ν_{k,β_k}.
On peut donc calculer et simplifier la fraction $F(X) - \dfrac{\mu_{k,\beta_k} X + \nu_{k,\beta_k}}{\left(X^2 - (z_k + \overline{z_k})X + |z_k|^2\right)^{\beta_k}}$ et itérer le procédé.