X PSI 2024
Correction

(1) Supposons $\mathbb{M}_n(u) = \emptyset$.
La matrice nulle n'appartient donc pas à $\mathbb{M}_n(u)$.
Or le spectre de la matrice nulle est $\{0\}$ et son rayon spectral est 0 donc $0 \geq R_u$.
Comme le rayon de convergence d'une série entière est positif, on en déduit que $R_u = 0$.

Réciproquement, on suppose $R_u = 0$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Son polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il a au moins une racine complexe λ.
Donc $\rho(A) \geq |\lambda| \geq 0 = R_u$ et $A \notin \mathbb{M}_n(u)$.
Par conséquent $\mathbb{M}_n(u) = \emptyset$.

Enfin, on considère $u = (k!)_{k\in\mathbb{N}}$.
Soit $r > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_k r^k > 0$
$\dfrac{u_{k+1}r^{k+1}}{u_k r^k} = (k+1)r \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$
D'après la règle d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} u_k r^k$ diverge.
On en déduit que $R_u = 0$.

(2) Si $R_u = 0$ alors $\mathbb{M}_n(u) = \emptyset \neq \{0_n\}$.
On suppose désormais $R_u > 0$.
Soit $A = \dfrac{R_u}{2} I_n$.
$\mathrm{Sp}(A) = \left\{\dfrac{R_u}{2}\right\}$ et $\rho(A) = \dfrac{R_u}{2}$.
$R_u > 0$ donc $\rho(A) < R_u$ et $A \in \mathbb{M}_n(u)$.
$R_u > 0$ donc A est non nulle et $\mathbb{M}_n(u) \neq \{0_n\}$.

(3) $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(C)$.
Son polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, son spectre est un ensemble non vide contenant au plus n éléments.
$\rho(A)$ est donc bien défini. Comme c'est un réel positif, $\rho(A) < R_u$ et $A \in \mathbb{M}_n(u)$.
On en déduit $\mathbb{M}_n(u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Trivial

$(iii) \Rightarrow (i)$ On suppose $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$.
D'après la première question, $R_u > 0$.
D'après la deuxième question, la matrice $A = \dfrac{R_u}{2} I_n$ appartient à $\mathbb{M}_n(u)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k) : kA \in \mathbb{M}_n(u)$.
$\mathcal{P}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.
$(k+1)A = kA + A \in \mathbb{M}_n(u)$ comme somme de deux éléments de $\mathbb{M}_n(u)$.

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Donc :
$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \dfrac{kR_u}{2} I_n \in \mathbb{M}_n(u)$.
Donc :
$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \rho\left(\dfrac{kR_u}{2} I_n\right) = \dfrac{kR_u}{2} < R_u$
En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient $R_u = +\infty$.

Enfin, on considère $u = \left(\dfrac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
Soit $r > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N} \ u_k r^k > 0$
$\dfrac{u_{k+1} r^{k+1}}{u_k r^k} = \dfrac{r}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$
D'après la règle d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} u_k r^k$ converge.
On en déduit que $R_u = +\infty$

(4) $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A \in \mathbb{M}_n(v)$ pour toute suite $v = (v_k)_{k\in\mathbb{C}}$ vérifiant $R_v > 0$.
Soit $v = (R^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (avec $R > 0$).
La série de terme général $R^k z^k = (Rz)^k$ converge si, et seulement si, $|Rz| = R\,|z| < 1$ donc $R_v = \dfrac{1}{R}$.
Soit λ une valeur propre de A.
$\forall R > 0 \ \ |\lambda| \leq \rho(A) < R_v = \dfrac{1}{R}$.
En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient :
$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \ \ |\lambda| \leq 0$
et on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$.
Mais en vertu du théorème de d'Alembert-Gauss, $\chi_A(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ avec pour tout k compris entre 1 et p $\lambda_k \in \mathrm{Sp}(A)$ donc $\chi_A(X) = X^n$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = \chi_A(A) = 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.
Le polynôme X^k annule A donc l'ensemble de ses racines contient l'ensemble des valeurs propres de A.
On en déduit $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$.
Mais en vertu du théorème de d'Alembert-Gauss, $\mathrm{Sp}(A)$ est non vide et $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
On en déduit que le rayon spectral de A est nul, ce qui permet de conclure facilement.

(5) D'après les propriétés des séries entières, le rayon de convergence est conservé lorsqu'on dérive :
$$R_u = R_{CV}\left(\sum_{k\geq 0} u_k z^k\right) = R_{CV}\left(\sum_{k\geq 1} k u_k z^{k-1}\right) = R_{CV}\left(\sum_{k\geq 0} (k+1) u_{k+1} z^k\right) = R_{u^{(1)}}$$
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(m) : R_{u^{(m)}} = R_u$.
$\mathcal{P}(0)$ est triviale et on vient de montrer que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(m)$ vraie.
$R_{CV}\left(u^{(m+1)}\right) = R_{CV}\left(\left(u^{(m)}\right)^{(1)}\right) = R_{CV}\left(u^{(m)}\right)$ d'après $\mathcal{P}(1)$.
D'où $R_{CV}\left(u^{(m+1)}\right) = R_{CV}\left(u^{(0)}\right)$ avec $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.
Pour conclure, il suffit de dire que si deux séries entières ont le même rayon de convergence alors elles ont le même disque ouvert de convergence.

(6) Soit $A \in \mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v)$.

$\rho(A) < R_u$ et $\rho(A) < R_v$.
D'après le cours, $R_{u+v} \geq \min(R_u, R_v)$ et $R_{u*v} \geq \min(R_u, R_v)$ (produit de Cauchy).
On en déduit $\rho(A) < R_{u+v}$ et $\rho(A) < R_{u*v}$
D'où $A \in \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u*v)$.

(7) A et B sont symétriques mais on ne les suppose pas réelles donc elles ne sont pas forcément diagonalisables.
Il y a trois réponses possibles :

— **Première réponse**
Cette méthode n'utilise pas le caractère symétrique des matrices A et B.
A et B comme toutes les matrices complexes sont trigonalisables. Comme elles commuent elles le sont simultanément (il me semble l'avoir mis dans le poly du cours), ce qui permet de montrer que les valeurs propres de AB sont de la forme $\lambda\mu$ avec λ valeur propre de A et μ valeur propre de B.
On en déduit $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$.
On a alors $\rho(AB) < R_u^2 \leq R_u$ car $R_u \in]0;1]$.

— **Deuxième réponse**
Si on pense qu'il manque l'hypothèse A et B symétriques réelles, on l'ajoute.
A et B sont alors diagonalisables, comme elles commutent elles sont simultanément diagonalisables (ce qui alors encore peut se montrer de deux façons en exploitant ou non la symétrie des deux matrices).
Cela permet de montrer que les valeurs propres de AB sont de la forme $\lambda\mu$ avec λ valeur propre de A et μ valeur propre de B et on conclut comme dans la première méthode.

— **Troisième réponse**
Si on pense qu'il manque l'hypothèse A et B symétriques réelles, on l'ajoute.
$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ donc AB est symétrique.
On sait que pour S symétrique réelle :
$\forall X \in \mathbb{R}^n$ tq $\|X\| = 1$ $\min(\mathrm{Sp}(S)) \leq X^T S X$ avec égalité pour X vecteur propre de S associé à la valeur propre $\min(\mathrm{Sp}(S))$ et $\max(\mathrm{Sp}(S)) \geq X^T S X$ avec égalité pour X vecteur propre de S associé à la valeur propre $\max(\mathrm{Sp}(S))$.
Par conséquent :
$\forall S \in S_n(\mathbb{R})\ \exists X \in \mathbb{R}^n$ tq $\left|X^T S X\right| = \rho(S)$ et $\|X\| = 1$
Donc il existe un vecteur unitaire tel que $\rho(AB) = \left|X^T A B X\right|$ et $\|X\| = 1$.
$\rho(AB) = \left|X^T A^T B X\right| = |(AX \mid BX)| \leq \|AX\| \, \|BX\|$ par Cauchy-Schwarz.
Mais $\|AX\| = \sqrt{X^T A^T A X} = \sqrt{X^T A^2 X} \leq \sqrt{\max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (\lambda^2)} = \rho(A)$ et $\|BX\| \leq \rho(B)$
donc $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$ et on conclut comme précédemment.

(8) D'après le théorème de Cayley-Hamilton $\nu(A)$ contient le polynôme caractéristique de A.

(9) $\{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \exists P \in \nu(A) \text{ avec } \deg(P) = k\}$ est une partie non vide (elle contient $n = \deg(\chi_A)$) de $\mathbb{N}$ donc elle possède un minimum m.
$m \in \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \exists P \in \nu(A) \text{ avec } \deg(P) = k\}$ donc il existe $P \in \nu(A)$ tel que $\deg(P) = m$.
Si on divise P par son coefficient dominant, on obtient un polynôme p qui vérifie les trois conditions de l'énoncé.
Soit alors q un autre polynôme vérifiant ces conditions.
$p(A) - q(A) = 0 - 0 = 0$ et $\deg(p - q) < m$ car p et q sont unitaires de degré m.
$\deg(p - q) < m = \min(\{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \exists P \in \nu(A) \text{ avec } \deg(P) = k\})$ donc
$\deg(p - q) \notin \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \exists P \in \nu(A) \text{ avec } \deg(P) = k\}$ et $p - q \in \nu(A)$ donc $\deg(p - q) = -\infty$ ie $p = q$.

(10) On effectue la division euclidienne de P par ϕ_A :

$\exists (Q,R)\in\mathbb{C}[X]^2$ tq $Q\varphi_A+R$ avec $\deg(R)<\deg(\varphi_A)$.
On en déduit $P(A)=Q(A)\varphi_A(A)+R(A)$.
Comme $P(A)=\varphi_A(A)=0$, $R(A)=0$ avec $\deg(R)<m$.
Comme dans la question précédente, on en déduit $R=0$.
Donc $P=Q\varphi_A$ et φ_A divise P.
La réciproque étant triviale, $\nu_A=\varphi_A\mathbb{C}[X]$.

(11) D'après le cours $\mathrm{Sp}(A)\subset\{z\in\mathbb{C}$ tq $\varphi_A(z)=0\}$.
Soit z une racine de φ_A.
$\varphi_A(X)=(X-z)^\alpha Q$ avec $\alpha\in\mathbb{N}^*$ et $Q(z)\neq 0$.
Donc $0=(A-zI_n)^\alpha Q(A)$
Si z n'est pas valeur propre de A alors $A-zI_n$ est inversible et $Q(A)=0$ avec Q non nul et $\deg(Q)<m$: c'est absurde.
Donc : $\{z\in\mathbb{C}$ tq $\varphi_A(z)=0\}\subset\mathrm{Sp}(A)$

(12) On note $\varphi_A=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}a_kX^k$ avec $a_m=1$ car φ_A est unitaire.
Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\overline{a_k}X^k$
$\varphi_A(A)=0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}a_kA^k=0$
En conjuguant et en tenant compte du caractère réel de A, on a $P(A)=0$.
$\deg(P)=m$ et P est unitaire car $\overline{a_m}=\overline{1}=1=a_m$.
Donc $P=\varphi_A$ et P et φ_A ont les mêmes coefficients.
On en déduit :
$\forall k\in[\![0;m]\!]\ \overline{a_k}=a_k$ ie $a_k\in\mathbb{R}$.

(13) T est une application linéaire (paraît clair à ce stade du problème).
Soit $P\in\mathrm{Ker}\,(T)$.
Pour tout i compris entre 1 et l, λ_i est racine de multiplicité au moins m_i de P.
Donc P a au moins $\displaystyle\sum_{i=1}^{l}m_i=m$ racines.
Mais P est de degré au plus $m-1$ donc P est nul et T est injective.
$\mathbb{C}_{m-1}[X]$ et C^m ayant la même dimension (m) T est un isomorphisme.
En particulier T est une bijection et $(U(\lambda_1),U'(\lambda_1),\dots)$ a un antécédent et un seul.

(14) Soit $S\begin{cases}\mathbb{C}_{m-1}[X]\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\\ R\mapsto R(A)\end{cases}$.
R est linéaire et compte-tenu de la minimalité de m, le noyau de S est réduit au polynôme nul.
On en déduit que S est injective.
Donc : si R_1 et R_2 sont deux polynômes de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$:

$$\begin{aligned}R_1(A)=R_2(A)&\iff R_1=R_2\\&\iff T(R_1)=T(R_2)\text{ car }T\text{ est injective}\\&\iff \forall i\in[\![1;l]\!]\ \forall k\in[\![0;m_i-1]\!]\ R_1^{(k)}(\lambda_i)=R_2^{(k)}(\lambda_i)\end{aligned}$$

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$.
On fait la division euclidienne de P par φ_A :
$P(X)=Q_1(X)\varphi_A(X)+R_1(X)$ avec $R_1\in\mathbb{C}_{m-1}[X]$
$P(A)=R_1(A)$
λ_i est racine de multiplicité m_i de φ_A donc :
$\forall i\in[\![1;l]\!]\ \forall k\in[\![0;m_i-1]\!]\ \varphi_A^{(k)}(\lambda_i)=0$
On en déduit avec la formule de Leibniz :

$$\forall i \in [\![1;l]\!]\ \forall k \in [\![0;m_i-1]\!]\ P^{(k)}(\lambda_i) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \varphi_A^{(l)}(\lambda_i) Q_1^{(k-l)}(\lambda_i) + R_1^{(k)}(\lambda_i) = R_1^{(k)}(\lambda_i)$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(A) = u(A) &\iff R_1(A) = Q(A) \\ &\iff \forall i \in [\![1;l]\!]\ \forall k \in [\![0;m_i-1]\!]\ R_1^{(k)}(\lambda_i) = Q^{(k)}(\lambda_i) \text{ car } R_1 \text{ et } Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \\ &\iff \forall i \in [\![1;l]\!]\ \forall k \in [\![0;m_i-1]\!]\ P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i) \end{aligned}$$

(15) Dans cette question, $A = \alpha I_n$.
$\forall P \in \mathbb{C}[X]\ P(A) = P(\alpha) I_n$
On en déduit $\nu(A) = \{(X-\alpha)Q \text{ avec } Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}\}$ puis $\varphi_A = X - \alpha$.
On a donc $m = 1$, $l = 1$, $\lambda_1 = \alpha$ et $m_1 = 1$.
Par conséquent si $P \in \mathbb{C}[X]$ alors :
$P(A) = u(A) \iff P(\alpha) = u(\alpha)$
Cette condition est vérifiée par le polynôme constant $P = U(\alpha)$ donc :
$u(\alpha I_n) = P(\alpha I_n) = U(\alpha) I_n$

Q16 A étant triangulaire, on a immédiatement $\chi_A = (X-\alpha)(X-\beta)$. On en déduit $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha;\beta\}$ (et non $\{\alpha\}$ ou $\{\beta\}$ car $\alpha \neq \beta$).
Donc l'ensemble des racines de ϕ_A est $\{\alpha;\beta\}$ et $\chi_A = (X-\alpha)(X-\beta)$ divise φ_A.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton et la question 10, φ_A divise χ_A. On en déduit qu'il existe une constante c tel que $\varphi_A = c\chi_A$.
Mais φ_A et χ_A sont unitaires donc $c = 1$ et $\varphi_A = (X-\alpha)(X-\beta)$.
On en déduit $m = 2$, $\lambda_1 = \alpha$ (par exemple), $\lambda_2 = \beta$, $m_1 = m_2 = 1$.
Si on prend $Q(X) = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(-U(\beta)(X-\alpha) + U(\alpha)(X-\beta)\right)$ alors $Q \in \mathbb{C}_1[X] = \mathbb{C}_{m-1}[X]$ et :
$Q(\alpha) = U(\alpha)$ et $Q(\beta) = U(\beta)$
Q est donc le polynôme de la question 13.
On en déduit :

$$\begin{aligned} U(A) &= Q(A) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(-U(\beta)(A-\alpha I_2) + U(\alpha)(A-\beta I_2)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(-U(\beta)\begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ 0 & \beta-\alpha \end{pmatrix} + U(\alpha)\begin{pmatrix} \alpha-\beta & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} U(\alpha) & \gamma\dfrac{U(\alpha)-U(\beta)}{\alpha-\beta} \\ 0 & U(\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(17) **(a)** $\mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$ est un ensemble fini dont on peut noter les éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, les λ_i étant deux à deux distincts.
Pour tout i compris entre 1 et N, on note m_i l'entier égal à 0 si λ_i n'est pas valeur propre de A et égal à la multiplicité de λ_i comme racine de φ_A si λ_i est valeur propre de A.
De même, pour i compris entre 1 et N, on note n_i l'entier égal à 0 si λ_i n'est pas valeur propre de B et égal à la multiplicité de λ_i comme racine de φ_B si λ_i est valeur propre de B.
Pour tout i compris entre 1 et N, on note $p_i = \max(m_i, n_i)$.
D'après la question 13, il existe un polynôme R tel que :
$\forall i \in [\![1;N]\!]\ \forall k \in [\![0;p_i-1]\!]\ R^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$.
D'après la question 14, $R(A) = u(A)$ et $R(B) = u(B)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k)$: $A(BA)^k = (AB)^k A$.
$\mathcal{P}(0)$ est vraie :

$A(BA)^0 = AI_n = I_nA = (AB)^0A$
On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\begin{aligned} A(BA)^{k+1} &= \left(A(BA)^k\right)BA = \left((AB)^kA\right)BA \\ &= \left((AB)^kAB\right)A = (AB)^{k+1}A \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On a donc prouvé :
$\forall k \in \mathbb{N}\ A(BA)^k = (AB)^kA$

Soit alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_kX^k$ un polynôme.

$$\begin{aligned} AP(AB) &= A\sum_{k=0}^{d} c_k(BA)^k = \sum_{k=0}^{d} c_kA(BA)^k \\ &= \sum_{k=0}^{d} c_k(AB)^kA = \left(\sum_{k=0}^{d} c_k(AB)^k\right)A \\ &= P(AB)A \end{aligned}$$

Enfin, d'après la question précédente, il existe un polynôme P tel que $u(AB) = P(AB)$ et $u(BA) = P(BA)$ ce qui permet de conclure facilement.

(18) $A \in \mathbb{M}_n(u)$ et $A \in \mathbb{M}_n(b)$ donc d'après la question (6) $A \in \mathbb{M}_n(u * v)$.
$u(A) = Q_u(A)$ où Q_u est l'unique polynôme de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que :
$\forall i \in [\![1; l]\!]\ \forall k \in [\![0; m_i - 1]\!]\ Q_u^{(k)}(\lambda_i) = U^{(m)}(\lambda_i)$
$v(A) = Q_v(A)$ où Q_v est l'unique polynôme de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que :
$\forall i \in [\![1; l]\!]\ \forall k \in [\![0; m_i - 1]\!]\ Q_v^{(k)}(\lambda_i) = V^{(m)}(\lambda_i)$
Soit $Q = Q_uQv$.
$\forall i \in [\![1; l]\!]\ \forall k \in [\![0; m_i - 1]\!]\ Q^{(k)}(\lambda_i) = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} Q_u^{(l)}(\lambda_i)Q_u^{(k-l)}(\lambda_i) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} U^{(l)}(\lambda_i)V^{(k-l)}(\lambda_i)$
$\forall t \in]-R_u; R_u[\ U(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_kt^k$
En dérivant, et c'est pour cela qu'on suppose que les valeurs propres de A sont toutes réelles :
$\forall t \in]-R_u; R_u[\ U'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} ku_kt^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)u_{k+1}t^k = U^{(m)}(t)$
On en déduit par récurrence qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans les notations de l'énoncé. La notation $U^{(m)}$ qui renvoie dans l'énoncé à la somme de la série entière $u^{(m)}$ est bien la dérivée m-ième de la fonction U.
On a également, en notant $w = u * v$, $R_w \geq \min(R_u, R_v) > 0$ et :
$\forall t \in]-R_w; R_w[\ w(t) = u(t)v(t)$
ce qui donne en dérivant k fois :
$\forall t \in]-R_w; R_w[\ W^{(k)}(t) = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} U^{(l)}(t)V^{(k-l)}(t)$
En particulier :
$\forall i \in [\![1; l]\!]\ \forall k \in [\![0; m_i - 1]\!]\ W^{(k)}(\lambda_i) = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} U^{(\lambda_i)}(t)V^{(k-l)}(\lambda_i) = Q^{(k)}(\lambda_i)$
D'après la question 14 :
$(u * v)(A) = w(A) = Q(A) = Q_u(A)Q_v(A) = u(A)v(A)$

(19) A est diagonalisable donc il existe P inversible telle que $A = P\text{Diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_l I_{m_l})P^{-1}$.
$\forall Q \in \mathbb{C}[X]$ $Q(A) = P\text{Diag}(Q(\lambda_1)I_{m_1}, \dots, Q(\lambda_l)I_{m_l})P^{-1}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} Q \in \nu(A) &\iff \forall i \in [\![1;l]\!]\ Q(\lambda_i) = 0 \\ &\iff (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_l) \text{ divise } Q \end{aligned}$$

Donc $\nu(A)$ est l'ensemble des multiples du polynôme $(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_l)$. Comme ce polynôme est unitaire, c'est φ_A.

(20) **(a)** On commence par observer que Q_k^A est de degré $m-1$ avec :

$\forall (k_1,k_2) \in [\![1;l]\!]^2$ $Q_{k_1}^A(\lambda_{k_2}) = \begin{cases} 0 \text{ si } k_1 \neq k_2 \\ 1 \text{ si } k_1 = k_2 \end{cases}$

Le polynôme $Q = \sum\limits_{k=1}^{l} U(\lambda_k)Q_k^{(A)}(X)$ est donc de degré inférieur ou égal à $m-1$ et vérifie :
$\forall i \in [\![1;l]\!]$ $Q(\lambda_i) = U(\lambda_i)$
Les m_i étant tous égaux à 1, la question (13) donne :
$u(A) = Q(A) = \sum\limits_{k=1}^{l} U(\lambda_k)Q_k^{(A)}(A)$

(b) Soit $k \in [\![1;l]\!]$.
Soit $i \in [\![1;l]\!]$.
Si i est différent de k, $\left(Q_k^A(\lambda_i)\right)^2 = 0^2 = 0 = Q_k^A(\lambda_i)$.
Si i est égal à k, $Q_k^A(\lambda_i)^2 = 1^2 = 1 = Q_k^A(\lambda_i)$
Donc, les λ_i étant deux à deux distincts, le polynôme $\varphi_A = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_l)$ divise le polynôme $\left(Q_k^A\right)^2 - Q_k^A$.
Comme remarqué à la fin de la question (10), on en déduit $\left(Q_k^A(A)\right)^2 = Q_k^A(A)$ et $Q_k^A(A)$ est un projecteur (en identifiant une matrice et l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé)
$(X-\lambda_k)Q_k^A$ est un multiple de φ_A donc $(A-\lambda_k I_n)Q_k^A(A) = 0$.
On en déduit que l'image de p_k^A est incluse dans le sous-espace propre $E_{\lambda_k}(A)$.
Réciproquement, soit $x \in E_{\lambda_k}(A)$.
$\forall P \in \mathbb{C}[X]$ $P(A)(x) = P(\lambda_k)x$
Donc :
$Q_k^A(x) = Q_k^A(\lambda_k)x = x$
On en déduit $x \in \text{Im}\left(Q_k^A\right)$
et par double inclusion : $\text{Im}\,(Q_k^A) = E_{\lambda_k}(A)$

Soit $x \in E_{\lambda_i}(A)$ avec i différent de k.
$Q_k^A(x) = Q_k^A(\lambda_i)x = 0$
Donc $E_{\lambda_i}(A) \subset \text{Ker}\left(Q_k^A\right)$
On en déduit $\bigoplus\limits_{i\neq k} E_{\lambda_i}(A) \subset \text{Ker}\left(Q_k^A\right)$
Mais $\dim\left(\bigoplus\limits_{i\neq k} E_{\lambda_i}(A)\right) = \sum\limits_{i\neq k} d_i = n - d_k = n - \text{rg}(Q_k^A) = \dim\left(\text{Ker}\,(Q_k^A)\right)$
Donc $\bigoplus\limits_{i\neq k} E_{\lambda_i}(A) = \text{Ker}\left(Q_k^A\right)$

(c) Soit $x \in \mathbb{C}^n$.
Il existe une unique famille $(x_1, \dots, x_l)$ telle que pour tout i x_i appartiennent au sous-

espace propre $E_{\lambda_i}(A)$ et $x = x_1 + \cdots + x_l$.
Soit k compris entre 1 et l.
$x = x_k + \sum_{i \neq k} x_i$ avec $x_k \in E_{\lambda_k}(A) = \text{Im}\left(Q_k^A\right)$ et $\sum_{i \neq k} x_i \in \text{Ker}\left(Q_k^A\right)$
Comme Q_k^A est un projecteur, $x_k = Q_k^A(A)$.
$x = x_1 + \cdots + x_l$ donc $x = \sum_{k=1}^{l} Q_k^A(A)(x)$.
D'où $\sum_{k=1}^{l} Q_k^A(A) = I_n$.

(21) BAB^{-1} sont semblables donc BAB^{-1} est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que A.
On en déduit :

$$\begin{aligned} u(BAB^{-1}) &= \sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) Q_k^{BAB^{-1}}(BAB^{-1}) = \sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) Q_k^A(BAB^{-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) B Q_k^A(A) B^{-1} = B\left(\sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) Q_k^A(A)\right) B^{-1} \\ &= Bu(A)B^{-1} \end{aligned}$$

(22) **(a)** D est évidemment diagonalisable, ce qui permet d'utiliser ce qui précède.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ les valeurs propres de D comptées sans multiplicités.
$u(D) = \sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) Q_k^D(D) = \sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) \text{Diag}\left(Q_k^D(d_{1,1}), \ldots, Q_k^D(d_{n,n})\right)$ est une matrice diagonale.
Soit i compris entre 1 et n.
$\exists! k \in [\![1; l]\!]$ tq $d_{i,i} = \lambda_k$
$[u(D)]_{i,i} = \sum_{j=1}^{l} U(\lambda_j) Q_j^D(d_{i,i}) = \sum_{j=1}^{l} U(\lambda_j) Q_j^D(\lambda_k) = U(\lambda_k) = U([D]_{i,i})$

(b) D'après la question 21, $u(A) = S\text{Diag}(U(d_{1,1}), \ldots, U(d_{n,n}))S^{-1}$.

(23) **(a)** H étant triangulaire supérieure, $\chi_H = X^n$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $H^n = 0$.
D'après la question (10), φ_H divise X^n. De plus φ_H n'est pas constant (si $P = a \neq 0$, $P(H) = aI_n$).
Donc $\varphi_H = X^k$ avec $k \in [\![1; n]\!]$.
Si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a $He_1 = 0$ et pour tout $i \in [\![2; n]\!]$, $He_i = e_{i-1}$.
On en déduit :
$H^2 e_n = He_{n-1} = e_{n-2}$, $H^3 e_n = e_{n-3}$....
En particulier $H^{n-1} e_n = e_1 \neq 0$ donc $H^{n-1} \neq 0$ et $\varphi_H = X^n$.

(b) Soit $P = \sum_{k=0}^{l} c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

$$P(X+\alpha)=\sum_{k=0}^{l}c_k(X+\alpha)^k=\sum_{k=0}^{l}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\alpha^{k-j}X^j$$

$$\begin{aligned}
P(A)=0 &\iff P(\alpha I_n+H)=0\\
&\iff \sum_{k=0}^{l}c_k(\alpha I_n+H)^k=0\\
&\iff \sum_{k=0}^{l}\left(c_k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\alpha I_n)^{k-j}H^j\right) \text{ car } \alpha I_n \text{ et } H \text{ commutent}\\
&\iff \sum_{k=0}^{l}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\alpha^{k-j}H^j=0\\
&\iff Q(H)=0 \text{ avec } Q(X)=P(X+\alpha)\\
&\iff \exists R\in\mathbb{C}[X] \text{ tq } P(X+\alpha)=R(X)X^n\\
&\iff \exists R\in\mathbb{C}[X] \text{ tq } P(X)=R(X-\alpha)(X-\alpha)^n\\
&\iff \exists S\in\mathbb{C}[X] \text{ tq } P(X)=S(X)(X-\alpha)^n
\end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi_A=(X-\alpha)^n$.

Par conséquent, $l=1$, $\lambda_1=\alpha$ et $m=n$.
Le polynôme $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{U^{(k)}}{k!}(X-\alpha)^k$ est de degré au plus $m-1$ et vérifie :
$\forall k\in[\![0;m-1]\!]\ Q^{(k)}(\alpha)=U^{(k)}(\alpha)$
donc d'après la question 13 :
$u(A)=Q(A)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!}(A-\alpha I_n)^k=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!}H^k$
Reste à évaluer les puissances de H. Le résultat est connu mais faut-il détailler la preuve.
Pour tout k compris entre 0 et $n-1$, soit $\mathcal{P}(k)$: $\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]\ \left(H^k\right)_{i,j}=\delta_{i+k,j}$

$H^0=I_n$ donc :
$\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]^2\ \left(H^0\right)_{i,j}=\delta_{i,j}=\delta_{i+0,j}$
et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\begin{aligned}
\forall(i,j)\in[\![1;n]\!]^2\ \left(H^{k+1}\right)_{i,j} &= \sum_{l=1}^{n}\left(H^k\right)_{i,l}h_{l,j}\\
&= \sum_{l=1}^{n}\delta_{i+k,l}\delta_{l+1,j}=\sum_{l=1}^{n}\delta_{i+k,l}\delta_{l,j-1}\\
&= \delta_{i+k,j-1}=\delta_{i+k+1,j}
\end{aligned}$$

et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On conclut facilement.

(24) **(a)** $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ GX=(YZ^T)X=Y(Z^TX)=(Z^TX)Y$ car Z^TX est un réel.
Donc $\mathrm{Im}\,(G)\subset\mathrm{Vect}(Y)$.
Mais Y^TY est non nul donc Y est non nul :
$\exists i_0\in[\![1;n]\!]$ tq $y_{i_0}\neq 0$
De même :

$\exists j_0 \in [\![1;n]\!]$ tq $z_{j_0} \neq 0$
On a alors $G_{i_0,j_0} = y_{i_0} z_{j_0} \neq 0$
Donc G est non nulle et son image est de dimension au moins 1.
On en déduit $\operatorname{Im}(G) = \operatorname{Vect}(Y)$ et $\operatorname{rg}(G) = 1$.

(b) $G^2 = (YZ^T)(YZ^T) = Y(Z^TY)Z^T = (Z^TY)YZ^T$ car Z^TY est un réel.
Donc $G^2 = (Z^TY)G$ ie le polynôme $X^2 - (Z^TY)X = X\left(X - Z^TY\right)$ annule G.
On en déduit que $\operatorname{Sp}(G) \subset \{0; Z^TY\}$ (mais on peut avoir $Z^TY = 0$).
Si $Z^TY = 0$ alors $\operatorname{Sp}(G) \subset \{0\}$.
Mais $\operatorname{rg}(G) = 1 < n$ ($n \geq 4$) donc G n'est pas inversible et 0 es valeur propre de G.
On a $\operatorname{Sp}(G) = 0$.
Si $Z^TY \neq 0$, on a comme ci-dessus $0 \in \operatorname{Sp}(G)$.
Le spectre de G ne peut pas être réduit à 0 car alors on aurait :
$0 = \operatorname{tr}(G) = \sum_{i=1}^{n} G_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = Z^TY \neq 0$

(c) On a donc dans tous les cas $\rho(G) = \left|Z^TY\right|$.
Y et Z étant réels, on a par Cauchy-Schwarz :
$\rho(G) \leq \sqrt{Z^TZ} \times \sqrt{Y^TY} \leq 1 < R_u$
donc $G \in \mathbb{M}_n(u)$

(d) Le polynôme $X(X - Z^TY)$ annule G donc φ_G divise $X(X - Z^TY)$.
D'après la question (11), le polynôme $X(X - Z^TY)$ divise φ_G.
Comme ce sont des polynômes unitaires, $\varphi_G = X(X - Z^TY)$

(e) On a donc $l = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = Z^TY$, $m = 2$ et $m_1 = m_2 = 1$.
Soit $Q(X) = U(0) + \dfrac{U(Z^TY) - U(0)}{Z^TY} X$.
$Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X] = \mathbb{C}_1[X]$, $Q(0) = U(0)$ et :
$Q(Z^TY) = U(0) + U(Z^TY) - U(0) = U(Z^TY)$
Donc $u(G) = Q(G) = U(0)I_n + \dfrac{U(Z^TY) - U(0)}{Z^TY} G$.

(f) Cette fois, $l = 1$, $m = m_1 = 2$ et $\lambda_1 = 0$.
$u(G) = U(0)I_n + U^{(1)}(0)G$

(25) **(a)**

$$\begin{aligned}
\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ (F\overline{F})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [F]_{i,k} [\overline{F}]_{k,j} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)} \omega^{-(k-1)(j-1)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-j)(k-1)} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\omega^{i-j}\right)^l
\end{aligned}$$

Si $i = j$:
$\forall i \in [\![1;n]\!] \ (F\overline{F})_{i,i} = \dfrac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} 1 = n$
Si $i \neq j$ alors $\omega^{i-j} \neq 1$ car $i - j$ qui est compris entre $-(n-1)$ et $n-1$ ne peut pas être un multiple de n.
On en déduit $(F\overline{F})_{i,j} = \dfrac{1}{n} \dfrac{1 - \left(\omega^{i-j}\right)^n}{1 - \omega^{i-j}} = \dfrac{1}{n} \dfrac{1 - \omega^{n(i-j)}}{1 - \omega^{i-j}} = 0$
Donc $F\overline{F} = I_2$.
On en déduit que F est inversible avec $F^{-1} = \overline{F}$.

(b)

$$\begin{aligned}\forall (k,l)\in [\![1;n]\!]^2\ (F^2)_{i,j} &= \sum_{a=1}^{n}[F]_{k,a}[F]_{a,l} = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\omega^{(k-1)(a-1)}\omega^{(a-1)(l-1)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\omega^{(a-1)(k+l-2)}\\ &= \begin{cases}0 \text{ si } n \text{ ne divise pas } k+l-2\\ 1 \text{ si } n \text{ divise } k+l-2\end{cases}\end{aligned}$$

Donc F^2 est à coefficients réels.

(v) $F^4 = F^2F^2 = F^2\overline{F^2}$ car F^2 est à coefficients réels.
On en déduit $F^4 = FF\overline{F}\overline{F} = FI_n\overline{F} = F\overline{F} = I_n$
Le polynôme X^4-1 annule F donc le spectre de F est contenu dans $\{1;-1;i;-i\}$.
D'où $\rho(F)\leq 1 < R_u$ et $F\in \mathbb{M}_n(u)$.

(d) X^4-1 annule F donc φ_F divise X^4-1 et $\varphi_F = (X-1)^{m_1}(X+1)^{m_2}(X-i)^{m_3}(X+i)^{m_4}$ avec $m1, m_2, m_3, m_4 \leq 1$
Par conséquent si $P(1)=U(1)$ et $P(-1)=U(-1)$ et $P(i)=U(i)$ et $P(-i)=U(-i)$ alors d'après la question (14), $u(F)=P(F)$.
On considère donc le polynôme :
$P(X) = \frac{1}{4}U(1)(X+1)(X^2+1) - \frac{1}{4}U(-1)(X-1)(X^2+1) + \frac{i}{4}U(i)(X+i)(X^2-1) - \frac{-i}{4}U(-i)(X-i)(X^2-1)$
On vérifie ensuite :
$P(1) = \frac{U(1)}{4}\times 2\times 2 - 0 + 0 - 0 = U(1)$, $P(-1)=U(-1)$, $P(i)=U(i)$ et $P(-i)=U(-i)$.

(26) **(a)** $\forall k\geq n+1\ u_k = 0$
On en déduit $R_u = +\infty$ donc u vérifie la condition (C^*).

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C}\ U(z) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}z^k\\ &= (1-p+pz)^n\end{aligned}$$

Donc U est en fait polynomiale.
Le polynôme $P=U$ vérifiera donc toujours les conditions de la question 14 et :
$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ u(A) = ((1-p)I_n + pA)^n$

(b) $u_0 = 0$ et :
$\forall k\in\mathbb{N}^*\ u_k = p(1-p)^{k-1}$
On en déduit que $R_u = \frac{1}{1-p} > 1$ et que u satisfait la condition (C^*).
Soit $A\in\mathbb{M}_n(u)$ diagonalisable.
$\exists S\in GL_n(\mathbb{C})$ et $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = SDS^{-1}$.
D'après la question (22)(b) :

$$\begin{aligned}u(A) &= S\mathrm{Diag}(U(D_{1,1}),\ldots,U(D_{n,n}))S^{-1}\\ &= S\mathrm{Diag}\left(\frac{pD_{1,1}}{1-qD_{1,1}},\ldots,\frac{pD_{n,n}}{1-qD_{n,n}}\right)S^{-1} \text{ cf la série génératrice de la loi géométrique}\\ &= SpD\left(I_n - qD\right)^{-1}S^{-1}\\ &= pSDS^{-1}S\left(I_n-qD\right)^{-1}S^{-1} = pA\left(S(I_n-qD)S^{-1}\right)^{-1}\\ &= pA(I_n-(1-p)A)^{-1}\end{aligned}$$