Mines 2020 MP2
Correction

1. $(X+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2k}$ et $(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

Le binôme de Newton donne $a_n = \binom{2n}{n}$ ainsi que :

$\forall k \in [\![0;n]\!]\ b_k = \binom{n}{k}$

Le cours sur les produits de polynômes donne :

$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}$

On a donc :

$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

2 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Donc $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. Soit $\alpha \in]0;1[$.

$\alpha > 0$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc :

$\forall k \in \mathbb{N}^*\ \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$

y compris à droite pour $k=1$ car $\alpha < 1$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0.

On en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \int_1^{n+1} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_0^n t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^{n}$

D'où :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Mais $1-\alpha > 0$ donc $(n+1)^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

On peut conclure par encadrement $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Soit $\alpha \in]1; +\infty[$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est toujours décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a donc :
$\forall k \geq 2 \ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall N \geq n+1 \ \displaystyle\int_{n+1}^{N+1} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$
En faisant tendre N vers $+\infty$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{n+1}^{+\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{n}^{+\infty}$
D'où :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$
Mais $\dfrac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.
On peut conclure par encadrement $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

4. On procède à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\forall x \in [2; +\infty[\ \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} &= \left[t\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^x - \int_2^x t\frac{-1}{t(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$.
Soit $x_1 = \max\left(2, \mathrm{e}^{1/\epsilon}\right)$.
$\forall t \geq x_1 \ \ln(t) \geq \dfrac{1}{\epsilon}$
On en déduit :
$\forall x \geq x_1 \ \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_2^{x_1} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} + \epsilon\int_{x_1}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \leq \int_2^{x_1} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} + \epsilon I(x)$
$\dfrac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{\ln(t)}} = \dfrac{\ln(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{t} = o\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$.
Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ n'est pas intégrable en $+\infty$.
Comme c'est une fonction positive, $I(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
On en déduit $\displaystyle\frac{1}{I(x)}\int_2^{x_1} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et :
$\exists x_2 \geq x_1$ tq $\forall x \geq x_2 \ \displaystyle\frac{1}{I(x)}\int_2^{x_1} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \leq \epsilon$
On a alors :
$\forall x \geq x_2 \ 0 \leq \displaystyle\frac{1}{I(x)}\int_2^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \leq 2\epsilon$

Donc $\dfrac{1}{I(x)}\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Si on reprend la formule de l'énoncé et qu'on la divise par $I(x)$, on a :

$$1 = \frac{\dfrac{x}{\ln(x)}}{I(x)} - \frac{2}{I(x)\ln(x)} + \frac{1}{I(x)}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\dfrac{\dfrac{x}{\ln(x)}}{I(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ ie $I(x) \sim \dfrac{x}{\ln(x)}$.

5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\ \forall x \in]-1;1[\ (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad (R=1)$

$\forall \alpha \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}x^n \quad (R=+\infty)$

Supposons $\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} &= \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-1)/2)}{n!}\\ &= (-1)^n\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!}\\ &= (-1)^n\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times 2n} = (-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\\ &= (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-1)^n\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \text{ égal 1 pour } n=0\end{aligned}$$

$\forall x \in]-1;1[\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x^n \quad (R=1)$

On en déduit :

$\forall x \in]-1;1[\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}x^n \quad (R=1)$

6. $\forall n \in \mathbb{N}\ |P(S_n=0_d)| = P(S_n=0_d) \leq 1 = |1|$ donc :

$R_F = R_{CV}\left(\displaystyle\sum_{n\geq0}P(S_n=0_d)x^n\right) \geq R_{CV}\left(\displaystyle\sum_{n\geq0}x^n\right) = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}\ |P(R=n)| = P(R=n) \leq 1 = |1|$ donc :

$R_G = R_{CV}\left(\displaystyle\sum_{n\geq1}P(R=n\right) \geq R_{CV}\left(\displaystyle\sum_{n\geq0}x^n\right) = 1$

D'après le cours sur les séries entières, F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_F;R_F[$.Comme $R_F \geq 1$, F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.

D'après le cours sur les séries entières, G est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_G;R_G[$.Comme $R_G \geq 1$, G est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $g_n\begin{cases}[-1;1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto P(R=n)x^n\end{cases}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $[-1;1]$.
- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq1}g_n$ converge uniformément sur $[-1;1]$:

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \|g_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1;1]} (|g_n(x)|) = P(R=n)$

Les évènements $(R=n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux incompatibles donc :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(R=n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(R=n)\right) = P(R\in\mathbb{N}^*) \leq 1$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} P(R=n)$ converge.

Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement sur $[-1;1]$.

Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformément sur $[-1;1]$

Donc G est définie et continue sur $[-1;1]$ et :

$G(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(R=n) = P(R\in\mathbb{N}^*) = P(R \neq +\infty)$ car R est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

7. Soient k et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$.

Si $R=k$ alors $S_k = 0_d$ donc $(R=k)\cap(S_k=0_d) = (R=k)$.

Donc si $k=n$, $P\left((S_n=0_d)\cap(R=k)\right) = P(R=k) = P(R_k)P(S_{n-k}=0_d)$ car $S_0 = 0_d$.

On suppose $k<n$.

On en déduit $(R=k)\cap(S_n=0_d) = (R=k)\cap(S_k=0_d)\cap(S_n=0_d)$

Mais $S_n = S_k + \displaystyle\sum_{l=k+1}^{n} X_l$ donc :

$(S_k=0_d)\cap(S_n=0_d) = (S_k=0_d)\cap\left(\displaystyle\sum_{l=k+1}^{n} X_l = 0_d\right)$

On en déduit :

$(R=k)\cap(S_n=0_d) = (R=k)\cap(S_k=0_d)\cap\left(\displaystyle\sum_{l=k+1}^{n} X_l = 0_d\right) = (R=k)\cap\left(\displaystyle\sum_{l=k+1}^{n} X_l = 0_d\right)$

Si on note $\mathcal{R}_k = \left\{(x_1,\ldots,x_k)\in\{-1;1\}^k \text{ tq } \forall l \in [\![1;k-1]\!] \ \displaystyle\sum_{i=1}^{l} x_i \neq 0_d \text{ et } \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = 0_d\right\}$ alors l'évènement $(R=k)$ est aussi l'évènement $((X_1,\ldots,X_k)\in\mathcal{R}_k)$ et par le lemme des coalitions, il est indépendant de l'évènement $\left(\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0_d\right)$

On en déduit : $P\left((S_n=0_d)\cap(R=k)\right) = P(R=k)P\left(\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0_d\right)$

Si on note pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}_N = \left\{(x_1,\ldots,x_N)\in\{-1;1\}^N \text{ tq } \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 0_d\right\}$ alors :

$P\left((S_n=0_d)\cap(R=k)\right) = P(R=k)P\left((X_{k+1},\ldots,X_n)\in\mathcal{S}_{n-k}\right)$

Mais $(X_{k+1},\ldots,X_n)$ et $(X_1,\ldots,X_{n-k})$ ont la même loi.

En effet $(X_{k+1},\dots,X_n)(\Omega)=(X_1,\dots,X_{n-k})(\Omega)=\{-1;1\}^{n-k}$ et

$$\begin{aligned}
& \forall(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n-k})\in\{-1;1\}^{n-k}\ P\left((X_{k+1},\dots,X_n)=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n-k})\right)\\
= & P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}(X_i=\epsilon_{i-k})\right)\\
= & \prod_{i=k+1}^{n}P(X_i=\epsilon_{i-k}) \text{ par indépendance}\\
= & \prod_{i=k+1}^{n}P(X_{i-k}=\epsilon_{i-k}) \text{ car } X_i\sim X_{i-k}\\
= & \prod_{i=1}^{n-k}P(X_i=\epsilon_i)\\
= & P\left(\bigcap_{i=1}^{n-k}(X_i=\epsilon_i)\right) \text{ par indépendance}\\
= & P\left((X_1,\dots,X_{n-k}=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n-k})\right)
\end{aligned}$$

D'après le cours $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n}X_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k}X_i=S_{n-k}$ ont alors la même loi.
D'où :
$$P\left((S_n=0_d)\cap(R=k)\right)=P(R=k)P\left(\sum_{i=k+1}^{n}X_i=0_d\right)=P(R=k)P(S_{n-k}=0_d)$$

On applique ensuite la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $((R=n))_{n\in\mathbb{N}^*}\cup(R=+\infty)$.

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*\ P(S_n=0_d) &= \sum_{k=1}^{+\infty}P\left((S_n=0_d)\cap(R=k)\right)+P\left((S_n=0_d)\cap(R=+\infty)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}P\left((S_n=0_d)\cap(R=k)\right) \text{ car si } S_n=0_d \text{ alors } R\le n\\
&= \sum_{k=1}^{n}P(R=k)P(S_{n-k}=0_d)
\end{aligned}$$

8. Si $x\in]-1;1[$ alors $|x|<R_F$ et $|x|<R_G$, ce qui légitime le produit de Cauchy à venir :

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*\ F(x)G(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_n=0_d)x^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(R=n)x^n\right) \text{ car } P(R=0)=0\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}P(R=k)P(S_{n-k}=0_d)\right)x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}P(R=k)P(S_{n-k}=0_d)\right)x^n \text{ car } P(R=0)=0\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}P(S_n=0_d)x^n=F(x)-P(S_0=0_d)\\
&= F(x)-1
\end{aligned}$$

Si $P(R\neq+\infty)<1$ alors :
$$\forall x\in[0;1]\ G(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(R=n)x^n\le\sum_{n=1}^{+\infty}P(R=n)=P(R\neq+\infty)<1$$

On en déduit :
$F(x) = \dfrac{1}{1-G(x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \dfrac{1}{1-G(1)} = \dfrac{1}{1-P(R \neq +\infty)} = \dfrac{1}{P(R=+\infty)}$.
Si $P(R \neq +\infty) = 1$ alors :
$\forall x \in [0;1[\; G(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(R=n)x^n < \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(R=n) = P(R \neq +\infty) = 1$
car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n < 1$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(R=n) > 0$ (sinon $P(R \neq +\infty) = 0$)
On en déduit :
$F(x) = \dfrac{1}{1-G(x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$ car G est continue en 1 avec $G(1) = 1$.

9. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.
$(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs telle que la série de terme général c_k diverge donc :
$\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
On en déduit :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \; \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \geq 2A$
La fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n_0} c_k x^k$ est polynomiale donc continue et :
$\exists \alpha \in]0;1[$ tq $\forall x \in]1-\alpha; 1+\alpha[\; \left| \sum\limits_{k=1}^{n_0} c_k x^k - \sum\limits_{k=1}^{n_0} c_k \right| < A$
On en déduit :
$\forall x \in]1-\alpha; 1+\alpha[\; \sum\limits_{k=1}^{n_0} c_k x^k > \sum\limits_{k=1}^{n_0} c_k - A \geq A$
Mais tout étant positif :
$\forall x \in]1-\alpha; 1[\; \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k x^k \geq \sum\limits_{k=1}^{n_0} c_k x^k$
ce qui entraîne :
$\forall x \in]1-\alpha; 1[\; \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k x^k > A$

10. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général c_k converge.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto c_k x^k \end{cases}$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue sur $[0;1]$.
- La série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} g f_k$ converge uniformément sur $[-1;1]$:
  $\forall k \in \mathbb{N} \; \|f_k\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} (|f_k(x)|) = c_k$
  Donc la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} f_k$ converge normalement sur $[0;1]$.
  Donc la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} f_k$ converge uniformément sur $[0;1]$

Donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k$ est continue sur $[0;1]$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k \in \mathbb{R}$
D'après ce qui précède :
$\sum\limits_{n\geq 0} P(S_n = 0_d)$ diverge $\iff \lim\limits_{1^-} F = +\infty$
D'après la question 8 :
$\lim\limits_{1^-} F = +\infty \iff P(R \neq +\infty) = 1$

Donc :
$\sum_{n\geq 0} P(S_n = 0_d)$ diverge $\Longleftrightarrow P(R \neq +\infty) = 1$

11 Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
P(Y_i = 1) &= P\left(S_i \notin \{S_k, 0 \leq k \leq i-1\}\right) \\
&= P\left(\bigcap_{k=0}^{i-1} (S_i \neq S_k)\right) \\
&= P\left(\bigcap_{k=0}^{i-1} (X_{k+1} + \cdots + X_i \neq 0)\right) \\
&= P\left(\bigcap_{k=0}^{i-1} \left(\sum_{j=k+1}^{i} X_j \neq 0\right)\right) \\
&= P\left(\bigcap_{l=1}^{i} \left(\sum_{j=i-l+1}^{i} X_j \neq 0\right)\right) \quad l = i-k \\
&= P\left(\bigcap_{l=1}^{i} \left(\sum_{a=1}^{l} X_{i+1-a} \neq 0\right)\right) \quad a = i-j+1
\end{aligned}$$

On introduit alors $\mathcal{Y}_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1;1\}^n \text{ tq } \forall i \in [\![1;n]\!] \ \sum_{j=1}^{i} x_j \neq 0\right\}$ ce qui permet d'écrire :
$P(Y_i = 1) = P\left((X_i, \ldots, X_1) \in \mathcal{Y}_i\right)$
Mais on montre comme ci-dessus que $(X_i, \ldots, X_1)$ a la même loi que $(X_1, \ldots, X_i)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
P(Y_i = 1) &= P\left((X_1, \ldots, X_i) \in \mathcal{Y}_i\right) \\
&= P\left(\bigcap_{j=1}^{i} \left(\sum_{a=1}^{j} X_a \neq 0\right)\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{i} (S_j \neq 0)\right) \\
&= P(R > i)
\end{aligned}$$

Mais $N_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$ donc par linéarité de l'espérance :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(Y_i = 1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(R > i)$

12. $(R > i+1) \subset (R > i)$ donc par continuité décroissante :
$P(R > i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} P\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} (R > i)\right) = P(R = +\infty) \in \mathbb{R}$.
Par Césaro $\dfrac{E(N_n)}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P(R > i) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(R = +\infty)$

13. Soit $Y_i = \dfrac{1 + X_i}{2}$.
$(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} (2Y_i - 1) = 2 \sum_{i=1}^{n} Y_i - n$ a la même parité que n donc :
$\forall n \in \mathbb{N} \ P(S_{2n+1} = 0) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ P(S_{2n} = 0) = P\left(\sum\limits_{i=1}^{2n} Y_i = n\right)$ où $\sum\limits_{i=1}^{2n} Y_i$ suit la loi binomiale de paramètres $2n$ et p.
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(pq)^n$
$S_0 = 0$ donc $P(S_0 = 0) = 1 = \binom{0}{0}(pq)^0$

14

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_{2n} = 0)x^{2n} \text{ car pour tout } n \in \mathbb{N} \ P(S_{2n+1} = 0) = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}(pq)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}(4pqx^2)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} \text{ d'après la question 5}
\end{aligned}$$

D'après la question 8 :
$\forall x \in]-1;1[\ \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}G(x)$
D'où :
$\forall x \in]-1;1[\ G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}$
D'après la question 6,

$$\begin{aligned}
P(R \neq +\infty) &= 1 - \sqrt{1-4p(1-p)} = 1 - \sqrt{1-4p+4p^2} \\
&= 1 - \sqrt{(1-2p)^2} = 1 - |1-2p| = 1 - |q-p|
\end{aligned}$$

On en déduit $P(R = +\infty) = |p-q|$.

On revient à la question 5 avec $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2 \ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} &= \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-3)/2)}{n!} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!} \\
&= (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \\
&= (-1)^n \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} \text{ égal } \frac{1}{2} \text{ pour } n = 1
\end{aligned}$$

$\forall x \in]-1;1[\ \sqrt{1+x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}x^n$
On en déduit :
$\forall x \in]-1;1[\ G(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}4^n(pq)^n x^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}(pq)^n x^{2n}$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N} \ P(R = 2n+1) = 0$ (ce qui est cohérent avec $P(S_{2n+1} = 0) = 0$)
$P(R = 0) = 0$ et :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(R=2n) = \binom{2n}{n}\dfrac{(pq)^n}{2n-1}$

$P(R=+\infty) = |p-q|$

15 $P(R=2n) = \dfrac{1}{(2n-1)4^n}\binom{2n}{n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ d'après la question 2.

$P(R=+\infty) = |p-q| = 0$ donc $P(R>2n) = P(R>2n+1) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(R=2k)$

Supposons :

$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n$ et $b_n \geq 0$

$a_n \sim b_n$

La série $\sum a_n$ converge (donc $\sum b_n$ converge également)

Soit $\epsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \ |a_n - b_n| \leq \epsilon b_n$

$$\begin{aligned}
\forall n \geq n_0\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - b_k)\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k - b_k| \leq \epsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \\
&\leq \epsilon \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right|
\end{aligned}$$

On en déduit $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$

D'où ici avec la question 3 :

$P(R>2n) = P(R>2n+1) \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Supposons :

$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n$ et $b_n \geq 0$

$a_n \sim b_n$

La série $\sum a_n$ diverge (donc $\sum b_n$ diverge également)

Soit $\epsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \ |a_n - b_n| \leq \epsilon b_n$

$$\begin{aligned}
\forall n > n_0\ \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - b_k\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k| = \sum_{k=0}^{n_0} |a_k - b_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k - b_k| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n_0} |a_k - b_k| + \epsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k \\
&\leq \sum_{k=0}^{n_0} |a_k - b_k| + \epsilon \sum_{k=0}^{n} b_k
\end{aligned}$$

La série à termes réels positifs $\sum b_n$ diverge donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Donc $\dfrac{\sum_{k=0}^{n_0}|a_k-b_k|}{\sum_{k=0}^{n} b_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et :

$\exists n_1 \geq n_0$ tq $\forall n \geq n_1$ $\dfrac{\sum_{k=0}^{n_0}|a_k-b_k|}{\sum_{k=0}^{n} b_k} \leq \epsilon$

$\forall n > n_1$ $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq 2\epsilon \sum_{k=0}^{n} b_k = 2\epsilon\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right|$

On en déduit $\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \sum_{k=0}^{n} b_k$

Donc :

$E(N_{2n+1}) = \sum_{i=0}^{2n+1} P(R > i) = \sum_{i=0}^{n}((P(R>2i)+P(R>2i+1)) = 2\sum_{i=0}^{n} P(R > 2i) \sim \dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$

$E(N_{2n}) = E(N_{2n+1}) - P(R > 2n+1) \sim \dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$ car $P(R > 2n+1) = o(\sqrt{n})$

Finalement $E(N_n) \sim 2\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$

16 (a_n) est décroissante donc :

$\forall k \in [\![0;n]\!]$ $a_n \leq a_k$

On multiplie par $b_{n-k} \geq 0$ et on somme :

$a_n \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1$

Mais $\sum_{k=0}^{n} b_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} b_l = B_n$ donc $a_n B_n \leq 1$

Les b_k étant strictement positifs, $B_n > 0$ et $a_n \leq \dfrac{1}{B_n}$

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{m-k} + \sum_{k=n}^{m} a_k b_{m-k} \\
&\leq a_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} + a_n \sum_{k=n}^{m} b_{m-k} \\
&\leq a_0 \sum_{l=m-n+1}^{m} b_l + a_n \sum_{l=0}^{m-n} b_l \\
&\leq a_0(B_m - B_{m-n}) + a_n B_{m-n}
\end{aligned}$$

17 Pour n assez grand $\dfrac{B_n}{B_{m_n-n}}(1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})) \leq B_n a_n \leq 1$

Compte tenu des hypothèses de l'énoncé : $\dfrac{B_n}{B_{m_n-n}}(1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et avec le théorème des gendarmes : $B_n a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

On en déduit $a_n \sim \dfrac{1}{B_n}$

Q18 Au moyen d'une comparaison série intégrale, on montre : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

On en déduit $\sum_{k=1}^{n} b_k \sim \ln(n)$.
On pose alors $m_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = n + n\lfloor \ln(n) \rfloor$
$\forall n \geq$ e $m_n \geq 2n > n$
$B_{m_n - n} = B_{n\lfloor \ln(n)\rfloor} \sim \ln(n\lfloor \ln(n)\rfloor) = \ln(n) + \ln(\lfloor \ln(n)\rfloor)$
$\lfloor x \rfloor \sim_{+\infty} x$ donc $\lfloor \ln(n) \rfloor \sim \ln(n)$
Comme ce sont des infiniment grands : $\ln(\lfloor \ln(n)\rfloor) \sim \ln(\ln(n)) = o(\ln(n))$
Donc $B_{m_n - n} \sim \ln(n) \sim B_n$

$b_n \sim \frac{C}{n}$ donc :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ b_n \leq \frac{2C}{n}$
Quitte à augmenter n_0, on peut le supposer plus grand que e.
$\forall n \geq n_0\ 0 \leq B_{m_n} - B_{m_n - n} = \sum_{k=n\lfloor \ln(n)\rfloor+1}^{n+n\lfloor \ln(n)\rfloor} b_k \leq 2C \sum_{k=n\lfloor \ln(n)\rfloor+1}^{n+n\lfloor \ln(n)\rfloor} \frac{1}{k}$
Par comparaison série intégrale :
$\forall n \geq n_0\ 0 \leq B_{m_n} - B_{m_n - n} \leq \int_{k=n\lfloor \ln(n)\rfloor+1}^{n+1+n\lfloor \ln(n)\rfloor} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\left(\frac{n+1+n\lfloor \ln(n)\rfloor}{n\lfloor \ln(n)\rfloor + 1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car
$n + 1 + n\lfloor \ln(n)\rfloor \sim n\lfloor \ln(n)\rfloor$ et $n\lfloor \ln(n)\rfloor + 1 \sim n\lfloor \ln(n)\rfloor$

On peut donc appliquer la question 17 :
$a_n \sim \frac{1}{B_n} \sim \frac{1}{C\ln(n)}$

19

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ \frac{G(x)}{1-x} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(R=n)x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(R=k)\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-P(R>n))x^n \\
&= \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{+\infty} P(R>n)x^n
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ F(x)\sum_{n=0}^{+\infty} P(R>n)x^n &= F(x)\frac{1-G(x)}{1-x} = \frac{1}{1-x} \text{ d'après la question 8} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n
\end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ F(x)\sum_{n=0}^{+\infty} P(R>n)x^n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(R>n)x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(S_k = 0_d)P(R>n-k)\right)x^n
\end{aligned}$$

D'où le résultat par propriété des séries entières.

20 Pour revenir au point de départ après $2n$ déplacements, il faut avoir fait k déplacements vers la gauche, k déplacements vers la droite, $n-k$ déplacements vers le haut et $n-k$ déplacements vers le bas.

Le nombre de trajectoires possibles, toutes de probabilité $\dfrac{1}{4^n}$ est

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}=\frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
=&\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2\\
=&\left(\binom{2n}{n}\right)^2 \text{ d'après la première question}
\end{aligned}$$

et on conclut facilement.

21. $\forall n\in\mathbb{N}^*\ 1=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}P(S_k=0_d)P(R>2n-k)=\sum_{k=0}^{n}P(S_{2k}=0_d)P(R>2n-2k)$

On utilise la partie D.

$\forall n\in\mathbb{N}\ a_n=P(R>2n)>0$

L'évènement $(R>2(n+1))$ est contenu dans l'évènement $(R>2n)$ donc (a_n) est décroissante.

$\forall n\in\mathbb{N}^*\ b_kP(S_{2k}=0_d)>0$

De plus $P(S_{2k}=0)\sim\dfrac{1}{\pi k}$ d'après la question 2.

Donc $P(R>2n)\sim\dfrac{\pi}{\ln(n)}\sim\dfrac{\pi}{\ln(2n)}$.

De plus $P(R>2n+1)=P(R>2n)\sim\dfrac{\pi}{\ln(2n+1)}$.

D'où $P(R>n)\sim\dfrac{\pi}{\ln(n)}$.

Enfin par comparaison série intégrale et sommation des équivalents : $E(N_n)\sim\pi\displaystyle\int_2^n\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

Il ne reste plus qu'à appliquer la question 4 pour obtenir $N_n\sim\dfrac{n}{\pi\ln(n)}$.