ANALYSE 1
TD
2024-2025
Chapitre 5
Intégrales à paramètres

941

1 Intégrales à paramètres

Exercice 1 *(CCP 2015)*

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est positive et décroissante.
3. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ F(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$
   En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ F(x) - F'(x) = \dfrac{1}{x}$
   En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ F(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$
   En déduire la limite de F en 0^+.
6. Montrer $F(x) \sim_{0^+} -\ln(x)$

Exercice 2 *(CCP 2017)*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer f'' à l'aide d'une intégrale.
2. Soit $g : (x,t) \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$· Montrer que f est solution de $y'' - y = 0$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.
4. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 *(Mines 2017)*

On pose $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie, continue et bornée.
2. On suppose désormais $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$.
   Montrer que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\widehat{f}'$ et en déduire $\widehat{f}$.

Exercice 4 *(Centrale 2016)*

1. Justifier l'existence des intégrales et l'égalité :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
2. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Calcul de $g''(x)$.

Il restait deux questions que le candidat n'a pas traitées. La note obtenue est 12.
Il s'agit naturellement de calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
Remarque
Voici l'énoncé d'une planche complète posée à l'X en 2022 :
Trouver $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 *(Centrale 2016)*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition de f ?
2. f est-elle continue sur son domaine de définition ?

Exercice 6 *(Centrale 2015, rapport du jury)*

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$
Montrer que f est définie et continue sur $]0;+\infty[$ puis déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction $g : x \mapsto xf(x)$.

Exercice 7 *(Centrale 2021)*

On pose $f(s) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+s)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
   f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
2. Calcul d'une intégrale.

Exercice 8 *(X 2019)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.
On pose :

$$\forall x \in [0;1[\ g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t$$

1. g est-elle continue sur $[0;1[$?
2. g est-elle continue en 1 ?
3. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$?

2 Exercices de révision

Exercice 9 *(Centrale 2016)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante, strictement positive qui diverge vers $+\infty$.
Montrer l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \,\mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

Exercice 10 *(Mines 2013)*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.
   Montrer que la suite (S_n) converge. On note l sa limite.
2. $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n \ln(s)\mathrm{d}s$
   (a) Montrer que l'intégrale I_n converge.
   (b) Montrer que la suite (I_n) converge.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -l$.

Exercice 11 *(Mines 2013)*

$f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x$
Développer f en série entière de α.