ANALYSE 1
TD
2024-2025
Chapitre 5
Intégrales à paramètres
Correction

941

1 Intégrales à paramètres

Exercice 1 *(CCP 2015)*

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est positive et décroissante.
3. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ F(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$
   En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ F(x) - F'(x) = \dfrac{1}{x}$
   En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ F(x) = \mathrm{e}^{x} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$
   En déduire la limite de F en 0^+.
6. Montrer $F(x) \sim_{0^+} -\ln(x)$

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t} \end{cases}$.
   f_x est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Si $x > 0$ alors $t^2 f_x(t) \sim_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Par contre si $x \leq 0$ alors :
   $\forall t \in \mathbb{R}_+\ f_x(t) \geq \dfrac{1}{1+t} \geq 0$
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ diverge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t$ diverge (avec peut-être un peu plus de détails aux

CCP).
Si on détaille l'utilisation des théorèmes du cours :
$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ |f_x(t)| \geq \left|\dfrac{1}{1+t}\right|$
$t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc f_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Cela signifie que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_x(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge. Mais f_x est positive donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ f_x(t) \geq 0$
D'où $F(x) \geq 0$ en intégrant.
Soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x_1 \leq x_2$
On a sans problème :
$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ f_{x_1}(t) \geq f_{x_2}(t)$
On en déduit en intégrant : $F(x_1) \geq F(x_2)$.
F est décroissante.
En raffinant l'argument, on peut montrer que F est strictement décroissante.

3. $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \dfrac{1}{1+t} \leq 1$
On multiplie par $\mathrm{e}^{-xt} \geq 0$ et on intègre :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ F(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$
Mais :
$\forall x > 0 \ \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$
Donc $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

4. Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t} \end{cases}$
   - g est $\mathcal{C}^1$ par rapport à x et :
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t}{1+t}\,\mathrm{e}^{-xt}$
   - Pour tout $x > 0$, la fonction $g(x,.)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   - Pour tout $x > 0$, la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - L'hypothèse de domination relative à $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est vérifiée sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
     Soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.
     $\forall (x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+ \ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{1+t}\,\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-at}$
     avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ $(a > 0)$

   Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
   $\forall x > 0 \ F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$
   On a alors :
   $\forall x > 0 \ F(x) - F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: F est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$\forall x > 0\ F'(x) = F(x) - \dfrac{1}{x}$
Donc F' est de classe $\mathcal{C}^n$ et F est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

5. Soit $G : x \mapsto \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$
G est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$:
Soit $x > 0$.
$t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[x;+\infty[$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = o\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$ en $+\infty$.
On a :
$\forall x > 0\ G(x) = \mathrm{e}^x \left(\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$
ce qui permet d'invoquer le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral.
G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$\forall x > 0\ G'(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = G(x) - \frac{1}{x}$
G est solution de la même équation différentielle que F.
$0 \leq G(x) \leq \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ donc $G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
Donc $F - G$ est solution de l'équation homogène associée $y' = y$ et :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > 0\ F(x) - G(x) = C\,\mathrm{e}^x$
et on conclut avec les limites en $+\infty$.
$F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$
On peut utiliser
$\forall x \in]0;1[\ F(x) = G(x) \geq \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x-1}(-\ln(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

Le recours à G pour obtenir l'expression de $F(x)$ de l'énoncé n'est pas indispensable :

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{\mathrm{e}^x} &= \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t)}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y}\,\mathrm{d}y = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On peut obtenir la limite de F en 0^+ avec l'expression de l'énoncé :
$\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \sim_{0^+} \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ n'est pas intégrable en 0^+.
Mais c'est une fonction positive donc $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.
On en déduit :
$F(x) = \mathrm{e}^x \left(\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

6.

$$\begin{aligned}F(x) &= \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^x \left(\left[\ln t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \ln t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\ln x + \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \ln t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme $t \mapsto \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (en 0 $\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t} \sim \ln(t)$) on conclut facilement.

Exercice 2 *(CCP 2017)*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer f'' à l'aide d'une intégrale.
2. Soit $g : (x,t) \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$. Montrer que f est solution de $y'' - y = 0$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.
4. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Correction

1. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$:
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   $t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{e}^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $\pm\infty$.
   On utilise ensuite le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ pour montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$:
   Soit $h \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{e}^{it} \end{cases}$.
   - h est $\mathcal{C}^2$ par rapport à x et :
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{e}^{it}$
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}\,\mathrm{e}^{it}$
   - pour tout $x > 0$, $h(x,.)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
   - pour tout $x > 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$:
     $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = O_{\pm\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
   - pour tout $x > 0$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}$:
   - l'hypothèse de domination, relative à $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, est vérifiée sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
     Soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.
     $\forall (x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}\ \left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \dfrac{2x(x^2+3t^2)}{(x^2+t^2)^3} \leq \dfrac{6x}{(x^2+t^2)^2} \leq \dfrac{6b}{(a^2+t^2)^2}$
     avec $t \mapsto \dfrac{6b}{(a^2+t^2)^2}$ continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{6b}{(a^2+t^2)^2} \sim_{\pm\infty} \dfrac{6b}{t^4}$

   Donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
   $\forall x > 0\ f''(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$
2. $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}$
   $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \dfrac{-2xt}{(x^2+t^2)^2}$
$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{2x(3t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^3}$
Donc $\Delta g = 0$

$$\begin{aligned}
\forall x > 0\ f''(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t)\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= -\left[\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{e}^{it}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \text{ IPP à justifier} \\
&= i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= i\left[g(x,t)\,\mathrm{e}^{it}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Justification de l'IPP :
$u(t) = \mathrm{e}^{it}$, $u'(t) = i\,\mathrm{e}^{it}$
$v'(t) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t)$, $v(t) = \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \dfrac{-2xt}{(x^2+t^2)^2}$
u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$

3. Il suffit de faire le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $t = xu$.
4. f est solution de $y'' - y = 0$ donc :
$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x > 0\ f(x) = A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{-x}$
On déduit de ce qui précède que f est bornée :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \ |f(x)| = \left|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\,\mathrm{e}^{ixu}|}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi$
Donc $A = 0$.
On peut appliquer à la forme précédente, ie $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ le théorème de la limite aux bornes :
Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ (x,u) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2} \end{cases}$
- $\forall u \in \mathbb{R}\ g(x,u) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} \dfrac{1}{1+u^2}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $g(x,.)$ est continue (par morceaux).
- La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :
  $\forall (x,u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ \ |g(x,u)| = \dfrac{1}{1+u^2} \leq \dfrac{1}{1+u^2}$
  avec $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc $f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi$.
D'où $B = \pi$ et :
$\forall x > 0\ f(x) = \pi\,\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 3 *(Mines 2017)*

On pose $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie, continue et bornée.
2. On suppose désormais $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$.
   Montrer que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\widehat{f}'$ et en déduire $\widehat{f}$.

Correction

1. On commence par montrer que f est bien définie.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-ixt} \end{cases}$.
   f_x est continue sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall t \in \mathbb{R}\ |f_x(t)| = |f(t)|$ où f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$
   Donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Il est facile de montrer que $\widehat{f}$ est bornée :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ \left|\widehat{f}(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$

   Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$ pour montrer que $\widehat{f}$ est continue.
   Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ (x,t) \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-ixt} \end{cases}$
   - La fonction g est continue par rapport à x :
     pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(.,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x,.)$ est continue (par morceaux).
   - L'hypothèse de domination est vérifiée :
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ |g(x,t)| = |f(t)| \leq |f(t)|$
     avec $|f|$ continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k)$: $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ avec :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ \widehat{f}^{(k)}(x) = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$
   la fonction $t \mapsto t^k\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$.
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après la question précédente.
   On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.
   Soit $h \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto t^k\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{e}^{-t^2/2} \end{cases}$
   - h est $\mathcal{C}^1$ par rapport à x et :
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -it^{k+1}\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h(x, .)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est continue par rapport à t.
- **Hypothèse de domination**
  $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \ \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = |t|^{k+1}\ \mathrm{e}^{-t^2/2} \leq |t|^{k+1}\ \mathrm{e}^{-t^2/2}$
  avec $t \mapsto |t|^{k+1}\ \mathrm{e}^{-t^2/2}$ continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}$:
  $t^2 \times |t|^{k+1}\ \mathrm{e}^{-t^2/2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$

Donc $\widehat{f}^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ie $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \widehat{f}^{(k+1)}(x) = \left(\widehat{f}^{(k)}(x)\right)'(x) = (-i)^{k+1}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{k+1}\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$
la fonction $t \mapsto t^{k+1}\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Donc $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :
$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \widehat{f}^{(k)}(x) = (-i)^k \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$

3.
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ \widehat{f}'(x) &= -i\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t\\ &= i\left(\left[\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} + ix\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right) \text{ IPP facile à justifier}\\ &= -x\widehat{f}(x)\end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \widehat{f}(x) = \widehat{f}(0)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$
ou encore :
$$\boxed{\widehat{f} = \sqrt{2\pi} f}$$

Exercice 4 *(Centrale 2016)*

1. Justifier l'existence des intégrales et l'égalité :
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
2. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Calcul de $g''(x)$.

Il restait deux questions que le candidat n'a pas traitées. La note obtenue est 12.
Il s'agit naturellement de calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Remarque
Voici l'énoncé d'une planche complète posée à l'X en 2022 :
Trouver $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

Correction

1. L'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ a été traitée en cours.
   On pose $\varphi : t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$. φ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. En $+\infty$, $\varphi(t) = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Avec les justifications usuelles :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin t\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad x = 2t\end{aligned}$$

2. $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \end{cases}$
   - f est continue par rapport à x et plus précisément, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(.,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - L'hypothèse de domination est vérifiée :
     $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ |f(x,t)| = \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \leq \varphi(t)$
     avec φ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   Donc g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soit $h \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-xt} \end{cases}$
   - h est $\mathcal{C}^2$ par rapport à x et :
$$\begin{aligned}\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \ \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) &= -\frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) &= \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\end{aligned}$$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $h(x,.)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (découle des questions précédentes).
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$:
     $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $t^2\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - L'hypothèse de domination relative à $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ est vérifiée sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
     Soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.
     $\forall (x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+^* \ \left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| = \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-at}$
     avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

donc g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; g'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} \,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
g''(x) &= \int_0^{+\infty} \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2it} - 2 + \mathrm{e}^{-2it}}{-4} \,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(x-2i)t}}{-(x-2i)} + 2\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x} + \frac{\mathrm{e}^{-(x+2i)t}}{-(x+2i)}\right]_0^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2i} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2i}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2+4} - \frac{2}{x}\right)
\end{aligned}$$

On montre ensuite que $g'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Pour cela on utilise le théorème de la limite aux bornes :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}+^*$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l(t) = 0$
- Pour tout $x \in [1;+\infty[$, la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction l est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :
  $\forall (x,t) \in [1;+\infty[\times\mathbb{R}_+^* \; \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt} \leq \dfrac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{e}^{-t} = \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(1,t)\right|$
  avec $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(1,.)\right|$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; g'(x) = -\frac{1}{4}\Big(\ln(x^2+4) - 2\ln(x)\Big) = -\frac{1}{4}\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$$

On fait ensuite du calcul de primitive :

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - \int x\frac{-8/x^3}{1+4/x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + 8\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} \\
&= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + Cte
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; g(x) = -\frac{x}{4}\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + Cte$$

On montre que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:

On reprend $h \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-xt} \end{cases}$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $h(x,.)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction nulle est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **Hypothèse de domination**
  $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \; |h(x,t)| \leq \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} = \phi(t)$
  avec ϕ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; g(x) = -\frac{x}{4} \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$$

g étant continue sur $\mathbb{R}_+$, il n'y a plus qu'à faire tendre x vers 0 pour obtenir :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 5 *(Centrale 2016)*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition de f ?
2. f est-elle continue sur son domaine de définition ?

Correction

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais elle n'est pas intégrable en $+\infty$:
   $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sim \dfrac{1}{t}$
   $f(0)$ n'est donc pas défini.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   $u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-1/2}$, $u'(t) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)(2t)(1+t^2)^{-3/2} = -\dfrac{t}{(1+t^2)^{3/2}}$
   $v'(t) = \cos(tx)$, $v(t) = \dfrac{\sin(tx)}{x}$
   u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
   On en déduit :
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t$ converge $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}t$ converge.
   Mais en $+\infty$, $\dfrac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^{3/2}} = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^{3/2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Cela signifie que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}t$ converge absolument.
   On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}t$ converge.
   On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t$ converge.
   $f(x)$ est donc défini.
   Finalement, le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$.
2. L'intégration par parties de la question précédente fournit une autre expression de $f(x)$:
   $\forall x \in \mathbb{R}^* \; f(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}t$

Soit $g\begin{cases}\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ (x,t)\mapsto \dfrac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^{3/2}}\end{cases}$

- g est continue par rapport à x.
- g est continue par rapport à t.
- **Hypothèse de domination**
  $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\ |g(x,t)|\leq \dfrac{t}{(1+t^2)^{3/2}}=\varphi(t)$

  avec φ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$: $\varphi(t)\sim\dfrac{1}{t^2}$

Donc la fonction $x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x)=o_0\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 6 *(Centrale 2015, rapport du jury)*

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est définie et continue sur $]0;+\infty[$ puis déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction $g : x\mapsto xf(x)$.

Correction

Pour respecter l'ordre des questions, on va d'abord montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide du théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$.

On montrera ensuite que f est de classe $\mathcal{C}^1$ à l'aide du théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$.

Soit $h\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ (x,t)\mapsto \dfrac{\cos(t)}{x^2+t^2}\end{cases}$.

- h est continue par rapport à x.
- h est continue (par morceaux) par rapport à t.
- L'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
  Soit $[a;b]$ $(0<a<b)$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
  $\forall (x,t)\in[a;b]\times\mathbb{R}_+\ |h(x,t)|=\dfrac{|\cos(t)|}{x^2+t^2}\leq\dfrac{1}{a^2+t^2}=\psi(t)$

  avec ψ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($\psi(t)\sim\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$).

Donc f est (définie et) continue sur $\mathbb{R}_+$.

- h est $\mathcal{C}^1$ par rapport à x
  $\forall (x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\dfrac{-2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}$
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $h(x,.)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (cf la domination ci-dessus)
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ est continue

- L'hypothèse de domination relative à $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est vérifiée sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $[a;b]$ $(0<a<b)$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.
  $\forall (x,t) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+ \ \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2x\left|\cos(t)\right|}{(x^2+t^2)^2} \leq \psi(t) = \dfrac{2b}{(a^2+t^2)^2}$
  avec ψ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x>0 \ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned}\forall x>0 \ g'(x) &= xf'(x)+f(x) = x\int_0^{+\infty}\frac{-2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)(-2x^2+x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)(t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Classiquement, on fait une IPP dans $g(x)$:

$$\begin{aligned}\forall x>0 \ g(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+t^2}\cos(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{x}{x^2+t^2}\sin(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{-2xt}{(x^2+t^2)^2}\sin(t)\,\mathrm{d}t \text{ IPP facile à justifier}\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{2xt}{(x^2+t^2)^2}\sin(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On en fait une deuxième pour faire de nouveau apparaître un cos :

$$\begin{aligned}\forall x>0 \ g(x) &= \left[\frac{2xt}{(x^2+t^2)^2}(-\cos(t))\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}(-\cos(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}\cos(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Vu les degrés qui apparaissent, on dérive g une seconde fois.

Soit $h \begin{cases}\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\ (x,t)\mapsto \dfrac{\cos(t)(t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^2}\end{cases}$.

- h est $\mathcal{C}^1$ par rapport à x
  $\forall (x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2x(x^2-3t^2)\cos(t)}{(x^2+t^2)^3}$
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $h(x,.)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (cf la domination ci-dessus)
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ est continue
- L'hypothèse de domination relative à $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est vérifiée sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $[a;b]$ $(0<a<b)$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall (x,t)\in[a;b]\times\mathbb{R}_+ \ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| &= \frac{2x\left|x^2-3t^2\right|\left|\cos(t)\right|}{(x^2+t^2)^3}\\ &\leq \frac{2x(x^2+3t^2)}{(x^2+t^2)^3} \leq \frac{6x(x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^3} \leq \frac{6x}{(x^2+t^2)^3}\\ &\leq \psi(t) = \frac{6b}{(a^2+t^2)^2}\end{aligned}$$

avec ψ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Donc g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x > 0\ g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x(x^2 - 3t^2)\cos(t)}{(x^2+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$$

L'équation différentielle cherchée est donc $y'' = y$.

On peut aller plus loin :
On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $t = xu$.
$\forall x > 0\ g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$
g est solution de $y'' - y = 0$ donc :
$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x > 0\ g(x) = A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{-x}$
On déduit de ce qui précède que f est bornée :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \ |g(x)| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \le \int_0^{+\infty} \frac{|\cos(xu)|}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$
Donc $A = 0$.
On peut appliquer à la forme précédente, ie $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ le théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$ donc $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$.
D'où $B = \dfrac{\pi}{2}$ et :
$\forall x > 0\ f(x) = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$.

Application du théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$

Soit $h \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,u) \mapsto \dfrac{\cos(xu)}{1+u^2} \end{cases}$

- La fonction h est continue par rapport à x.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $h(x,.)$ est continue (par morceaux).
- L'hypothèse de domination est vérifiée :
  $\forall (x,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\ \ |h(x,u)| \le \dfrac{1}{1+u^2}$
  avec $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *(Centrale 2021)*

On pose $f(s) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+s)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
   f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
2. Calcul d'une intégrale.

Correction

1. Si $f(s)$ est défini, la fonction sous l'intégrale doit être continue par morceaux (donc définie) sur $]0;1[$, ce qui impose :
   $\forall x \in]0;1[\ x + s > 0$
   Faisant tendre x vers 0, on obtient $s \ge 0$.

Réciproquement, soit $s > 0$.
$\forall x \in [0;1]\ x + s > 0$
Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x+s)}{1+x}$ est continue sur $[0;1]$ et $f(s)$ est bien défini.
Reste le cas $s = 0$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x}$ est continue sur $]0;1]$.
De plus , $\dfrac{\ln(x)}{1+x} \sim_0 \ln(x)$ et la fonction ln est intégrable sur $]0;1]$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x}$ est intégrable sur $]0;1]$.
On en déduit que $f(0)$ est bien défini.

Finalement, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

Soit $g \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times]0;1] \to \mathbb{R} \\ (s,x) \mapsto \dfrac{\ln(x+s)}{1+x} \end{cases}$.

- g est $\mathcal{C}^1$ par rapport à s et :
  $\forall (s,x) \in \mathbb{R}_+ \times]0;1]\ \dfrac{\partial g}{\partial s}(s,x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+s)}$
- Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $g(s,.)$ est continue et intégrable sur $]0;1]$.
- Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{\partial g}{\partial s}(s,.)$ est continue sur $]0;1]$.
- L'hypothèse de domination relative à $\dfrac{\partial g}{\partial s}$ est vérifiée sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
  Soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
  $\forall (s,x) \in [a;b] \times]0;1]\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial s}(s,x)\right| = \dfrac{1}{(x+1)(x+s)} \le \dfrac{1}{a}$
  avec $x \mapsto \dfrac{1}{a}$ continue, positive et intégrable sur $]0;1]$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
$\forall s > 0\ f'(s) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+s)}\,\mathrm{d}x$
et à ce stade, on n'a rien démontré sur la régularité de f sur $\mathbb{R}_+$.
Néanmoins :

$$\begin{aligned} \forall s \in]0;1[\cup]1;+\infty[\ f'(s) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+s)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{s-1}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+s}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{s-1}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x+s}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{s-1}\left(\ln\left(\frac{2}{1+s}\right) - \ln\left(\frac{1}{s}\right)\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $f'(s) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} +\infty$
f ne peut donc pas être de classe $\mathcal{C}^1$.
A ce stade, on n'a rien conclu sur la continuité de f en 0.

Exercice 8 *(X 2019)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$.
On pose :

$$\forall x \in [0;1[\ g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t$$

1. g est-elle continue sur $[0;1[$?
2. g est-elle continue en 1 ?
3. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$?

Correction
Soit $x \in [0;1[$.
La fonction $f_x \begin{cases}]x;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t-x}} \end{cases}$ est continue.
Comme f est continue sur le segment $[0;1]$, elle y est bornée :
$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall s \in [0;1]\ |f(s)| \leq M$
On en déduit $f_x(t) = o_{0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t-x}}\right)$.
f_x est donc intégrable sur $]x;1]$ et $g(x)$ est bien défini.
On fait alors le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $t = (1-u)x + u$ et on obtient :

$$\forall x \in [0;1[\ g(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f((1-u)x+u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Le théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$ s'applique sans problème à la fonction :
$h \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f((1-u)x+u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \end{cases}$.
On en déduit que g est continue sur $[0;1[$ prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$ en posant $g(1) = 0$.
Enfin, le cas d'une fonction constante non nulle, montre que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, g ne l'est pas forcément.

2 Exercices de révision

Exercice 9 *(Centrale 2016)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante, strictement positive qui diverge vers $+\infty$.
Montrer l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

Correction
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x} \end{cases}$.
$a_n > 0$ donc f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec :
$\forall n \in \mathbb{N}\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{a_n}$.

$\forall N \in \mathbb{N} \ \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\,\mathrm{d}x$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit $g_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$.

- Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction g_N est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- La suite de fonctions $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers :
  $S \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \,\mathrm{e}^{-a_n x} \end{cases}$.
  Cela se justifie en utilisant le théorème spécial sur la convergence des séries alternées.
  Par contre la suite $(g_N(0))_{N\in\mathbb{N}}$ diverge.
- S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet les fonctions g_N le sont et il y a convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:
  $\forall x \in [a;b] \ \forall N \in \mathbb{N} \ |g_N(x) - S(x)| \leq \mathrm{e}^{-a_{N+1}x} \leq \mathrm{e}^{-a_{N+1}a}$
  Cela se justifie en utilisant le théorème spécial sur la convergence des séries alternées.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :
  $\forall N \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ 0 \leq g_1(x) \leq g_N(x) \leq g_0(x)$
  Rappelons la démonstration du théorème spécial sur la convergence des séries alternées :
  $(g_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(g_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  On en déduit :
  $\forall N \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |g_N(x)| \leq g_0(x)$ avec $g_0 = f_0$ positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  On conclut avec le théorème de convergence dominée.

Remarque
On peut procéder différemment.
On part toujours de :
$\forall N \in \mathbb{N} \ \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\,\mathrm{d}x$
On introduit ensuite la fonction S et on montre qu'elle est continue.
Avec la majoration $|S(x)| \leq e^{-a_0 x}$, on montre que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N} \ \left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \,\mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{a_n} \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n \,\mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n \,\mathrm{e}^{-a_n x} \right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a_{N+1}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a_{N+1}}
\end{aligned}$$

et on conclut facilement.

Exercice 10 *(Mines 2013)*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.
   Montrer que la suite (S_n) converge. On note l sa limite.
2. $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n \ln(s)\mathrm{d}s$

(a) Montrer que l'intégrale I_n converge.

(b) Montrer que la suite (I_n) converge.

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -l$.

Correction

1. Classique, RAS.
2. (a) I_n est une intégrale impropre en 0, sa convergence est facile à établir.

(b) $I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n$ avec $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \left(1-\dfrac{s}{n}\right)^n \ln(s) \text{ si } s \leq n \\ s \mapsto 0 \text{ si } s > n \end{cases}$

$\forall s \in [0;n[\ \left(1-\dfrac{s}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{s}{n}\right)\right) \leq \mathrm{e}^{-s}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall s \in \mathbb{R}_+^*\ |f_n(s)| \leq \mathrm{e}^{-s}\,|\ln s|$

Le reste est facile.

$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\ln(s)\mathrm{d}s$

(c)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n \left(1-\frac{s}{n}\right)^n \ln(s)\mathrm{d}s \quad s = t\,n\\
&= \int_0^1 (1-t)^n \ln(nt) n\,\mathrm{d}t \quad x = 1-t\\
&= \int_1^0 x^n \ln(n(1-x)) n(-\,\mathrm{d}x)\\
&= \int_0^1 nx^n \ln(1-x)\,\mathrm{d}x + n\int_0^1 x^n \ln(n)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{n}{n+1}(x^{n+1}-1)\ln(1-x)\right]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}-1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \frac{n}{n+1}\ln(n)\\
&= \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \int_0^1 \sum_{k=0}^n x^k\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{n}{n+1}S_n - \frac{n}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

D'où, en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\ln(s)\,\mathrm{d}s$$

Exercice 11 *(Mines 2013)*

$f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x$

Développer f en série entière de α.

Correction

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

On vérifie d'abord que $f(\alpha)$ est bien défini.
$x \mapsto \dfrac{\cos(\alpha x)}{(\sinh(x))^{2/3}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\dfrac{\cos(\alpha x)}{(\sinh(x))^{2/3}} \sim_0 \dfrac{1}{x^{2/3}}$
$\dfrac{1}{(\sinh(x))^{2/3}} \sim_{+\infty} 2^{2/3}\,\mathrm{e}^{-2/3\,x}$ donc $x^2\,\dfrac{\cos(\alpha x)}{(\sinh(x))^{2/3}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
$\forall x \in \mathbb{R}\ \cos(\alpha x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}\alpha^{2n}}{(2n)!}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^{2n}\alpha^{2n}}{(2n)!}\,\dfrac{1}{(\sinh(x))^{2/3}} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme est continue.
- La série $\sum \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n|$ converge.
  Il y a deux façons de le démontrer :
  — **Première méthode**
  Il faut estimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x$.
  Maple ne calcule pas $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x$
  On peut montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+\ \sinh x \geq x$.
  On en déduit :
  $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n-2/3}\,\mathrm{d}x$
  On en déduit :
  $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
  En fait le théorème de convergence dominée suffit à prouver que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x = o(1)$.
  Bien sûr, on sait qu'on peut se contenter de cette information si on a déjà regardé $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x$.
  $\sinh(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ donc :
  $\exists a > 0$ tq $\forall x \in [1; +\infty[\ \sinh(x) \geq a\,\mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{a^{2/3}} \int_1^{+\infty} x^{2n}\,\mathrm{e}^{-2/3x}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{a^{2/3}} \int_0^{+\infty} x^{2n}\,\mathrm{e}^{-2/3x}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{a^{2/3}}\,\frac{3}{2}\,(2n)!\,\left(\frac{9}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

  On en déduit :
  $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(\sinh(x))^{2/3}}\,\mathrm{d}x = O\left((2n)!\,\left(\frac{9}{4}\right)^n\right)$.

On en déduit :
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n| = O\left(|\alpha|^{2n}\left(\frac{9}{4}\right)^n\right) = O\left(\left(\frac{3}{2}|\alpha|\right)^{2n}\right)$.

— **Deuxième méthode**
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série de terme général $|f_n(x)| = \dfrac{x^{2n}\alpha^{2n}}{(2n)!}\dfrac{1}{(\sinh(x))^{2/3}}$ converge et :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| = \frac{\cosh(\alpha x)}{(\sinh(x))^{2/3}}$
En $+\infty$, pour $\alpha \neq 0$, $\dfrac{\cosh(\alpha x)}{(\sinh(x))^{2/3}} \sim \dfrac{2^{2/3}\,\mathrm{e}^{|\alpha|x}}{2\,\mathrm{e}^{2/3x}}$ (en distinguant le cas $\alpha > 0$ et le cas $\alpha < 0$)
Pour $\alpha = 0$, $\dfrac{\cosh(\alpha x)}{(\sinh(x))^{2/3}} \sim \dfrac{2^{2/3}\,\mathrm{e}^{|\alpha|x}}{\mathrm{e}^{2/3x}}$
On en déduit que si $|\alpha| < \dfrac{2}{3}$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a alors :
$\forall p \in \mathbb{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n| = \int_{\mathbb{R}_+^*} \sum_{n=0}^{p} |f_n| \leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \in \mathbb{R}$
La suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n|$ est majorée et c'est une série à termes réels positifs donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n|$ converge.

Donc si $|\alpha| < \dfrac{2}{3}$, on peut appliquer le théorème N1 et f est développable en série entière.
Faut-il aller plus loin ?