

# ALGÈBRE LINÉAIRE

PC\*1

2024 - 2025

Chapitre 6 :

Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Fabrice Monfront

Lycée du Parc

## 1 Produits scalaires

### 1.1 Définitions

- Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  ev.

On appelle produit scalaire sur  $E$  toute application

$$\begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x | y) \text{ (ou } \langle x, y \rangle, x.y, xy, \text{ ou } \vec{x} \cdot \vec{y} \text{ en géométrie)} \end{cases}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

— linéarité à droite

$$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3 \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 (x | \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 (x | y_1) + \lambda_2 (x | y_2)$$

— linéarité à gauche

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3 \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 | y) = \lambda_1 (x_1 | y) + \lambda_2 (x_2 | y)$$

— symétrie

$$\forall (x, y) \in E^2 (x | y) = (y | x)$$

—  $\forall x \in E \setminus \{0\} (x | x) > 0$

#### Remarques

— En pratique si on doit prouver qu'une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est un produit scalaire sur  $E$  on vérifie la symétrie et la linéarité d'un côté car alors  $\varphi$  est linéaire de l'autre côté.

— Si  $\varphi$  est une application bilinéaire de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\forall (x, y) \in E^2 \varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0$$

et en particulier  $\varphi(0, 0) = 0$ .

On peut donc dans la définition remplacer la dernière propriété par :

$$\forall x \in E (x | x) \geq 0 \text{ et } (x | x) = 0 \iff x = 0$$

ou même :

$$\forall x \in E (x | x) \geq 0 \text{ et } (x | x) = 0 \implies x = 0$$

- On appelle espace préhilbertien réel tout  $\mathbb{R}$  ev muni d'un produit scalaire.

On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

- Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

Pour tout  $x \in E$  on appelle norme (euclidienne) de  $x$  et on note  $\|x\|$  le réel positif

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

D'après la dernière propriété dans la définition d'un produit scalaire on a :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \|x\| > 0$$

ou encore :

$$\forall x \in E \quad \|x\| \geq 0 \text{ et } \|x\| = 0 \iff x = 0$$

On a également :

$$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\text{En effet } \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x | \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x | x)} = |\lambda| \|x\|$$

On appelle vecteur unitaire de  $E$  tout vecteur de  $E$  de norme égale à 1.

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \frac{x}{\|x\|} \text{ est un vecteur unitaire de } E$$

$$\left( \text{car } \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1 \right)$$

Pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E$  on appelle distance (euclidienne) de  $x$  à  $y$  et on note  $d(x, y)$  le réel positif  $d(x, y) = \|y - x\|$ .

$$\left( \text{En géométrie on écrit } AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \right)$$

On a :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) \geq 0 \text{ et } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\left( \text{car } d(x, y) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = d(y, x) \right)$$

## 1.2 Exemples

- L'application  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)) \mapsto (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$  appelé produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ .

### Démonstration

— **Symétrie**

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad (y | x) = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x | y)$$

— **Linéarité à droite**

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (x | \lambda y + \mu z) &= \sum_{i=1}^n x_i (\lambda y_i + \mu z_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i y_i + \mu x_i z_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \mu \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ &= \lambda (x | y) + \mu (x | z) \end{aligned}$$

On en déduit la linéarité à gauche (grâce à la symétrie).

$$\text{— } \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x | x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

et

$$\begin{aligned}
 (x | x) = 0 &\iff \sum_{i=1}^n (x_i^2 \in \mathbb{R}_+) = 0 \\
 &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket x_i^2 = 0 \\
 &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket x_i = 0 \\
 &\iff x = 0
 \end{aligned}$$

La structure euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  qu'on obtient ainsi est appelée structure euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Ecriture matricielle**

Quelque soient  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  dans  $\mathbb{R}$  on a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$$

En pratique on identifie  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}$  (ie : on identifie la matrice  $(a)$  et le réel  $a$ ) et on identifie  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (ie : on écrit les éléments de  $\mathbb{R}^n$  en colonnes). Le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrit alors :

$$\boxed{\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad (X | Y) = X^T Y}$$

L'écriture matricielle est en général plus intéressante que l'écriture développée (ie  $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ).

• **TPE 99**

1.  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $\begin{cases} \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto (A|B) = \text{tr}(A^T \cdot B) \end{cases}$  est un produit scalaire.

2. Soient  $A \in \mathcal{M}$  et  $f \begin{cases} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \\ M \mapsto f(M) = A \cdot M^T \cdot A \end{cases}$ .

Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**Correction**

1. On vérifie d'abord que l'application  $(. | .)$  est bien définie.

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}^2$ .

$A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  donc  $A^T B$  est bien définie et appartient à  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

Sa trace est bien définie.

— **Symétrie**

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}^2 \quad (A | B) = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A) = (B | A)$$

— **Linéarité à droite**

$$\begin{aligned}
 \forall (A, B_1, B_2) \in \mathcal{M}^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (A | \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) &= \text{tr}(A^T(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)) \\
 &= \text{tr}(\lambda_1 A^T B_1 + \lambda_2 A^T B_2) \\
 &= \lambda_1 \text{tr}(A^T B_1) + \lambda_2 \text{tr}(A^T B_2) \\
 &= \lambda_1 (A | B_1) + \lambda_2 (A | B_2)
 \end{aligned}$$

- On en déduit la linéarité à gauche (grâce à la symétrie).
- Avant d'aller plus loin, on va développer  $(A | B)$ .

$$\begin{aligned} \forall (A, B) \in \mathcal{M}^2(A | B) &= \text{tr}(A^T B) = \text{tr} \left( \left( \sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \right) \\ &= \text{tr} \left( \left( \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \right) = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,i} \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq n}} a_{k,i} b_{k,i} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\forall A \in \mathcal{M}(A | A) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}^2 \geq 0$$

De plus :

$$\begin{aligned} (A | A) = 0 &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket a_{i,j}^2 = 0 \\ &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket a_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

2.  $f$  est bien définie :

Soit  $M \in \mathcal{M}$ .

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $M^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  donc le produit  $AM^T$  est bien défini et appartient à  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ .

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  donc le produit  $AM^T A$  est bien défini et appartient à  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

La linéarité de  $f$  est triviale.

Pour la symétrie il faut faire attention : on n'a prouvé  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  que pour des matrices carrées.

$$\begin{aligned} \forall (M, N) \in \mathcal{M}^2(f(M) | N) &= \text{tr}(f(M)^T N) = \text{tr}(A^T M A^T N) \\ &= \text{tr} \left( (A^T M)(A^T N) \right) \text{ avec } A^T M \text{ et } A^T N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ &= \text{tr} \left( (A^T N)(A^T M) \right) = \text{tr}(A^T N A^T M) = \text{tr}(f(N)^T M) = (f(N) | M) \\ &= (M | f(N)) \text{ par symétrie du produit scalaire} \end{aligned}$$

$f$  est symétrique donc  $f$  est diagonalisable.

- Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$  et  $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -ev des fonctions continues de  $[a; b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

L'application  $\begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto (f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt \end{cases}$  est un produit scalaire sur  $E$ .

### Démonstration

#### — Symétrie

$$\forall (f, g) \in E^2 (g | f) = \int_a^b g(t)f(t) dt = \int_a^b f(t)g(t) dt = (f | g)$$

— **Linéarité à gauche**

$$\begin{aligned}
 \forall (f_1, f_2, g) \in E^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \mid g) &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))g(t) \, dt \\
 &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(t)g(t) + \lambda_2 f_2(t)g(t)) \, dt \\
 &= \lambda_1 \int_a^b f_1(t)g(t) \, dt + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)g(t) \, dt \\
 &= \lambda_1 (f_1 \mid g) + \lambda_2 (f_2 \mid g)
 \end{aligned}$$

On en déduit la linéarité à droite (grâce à la symétrie).

—  $\forall f \in E \quad (f \mid f) = \int_a^b (f(t)^2 \geq 0) \, dt \geq 0$

— Soit  $f \in E$  tq  $(f \mid f) = 0$ .

On a  $\int_a^b f^2(t) \, dt = 0$  où  $f^2$  est une fonction continue et positive sur  $[a; b]$  donc  $f^2 = 0$

ie :

$$\forall t \in [a; b] \quad f^2(t) = 0$$

Donc :

$$\forall t \in [a; b] \quad f(t) = 0 \text{ ie } f = 0$$

**Remarque**

Si on prend pour  $E$  le  $\mathbb{R}$ -ev des fonctions continues par morceaux de  $[a; b]$  dans  $\mathbb{R}$  ça ne marche plus.

$$\text{Soit } f \begin{cases} [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 0 \text{ si } t \neq a \\ a \mapsto -1 \end{cases} .$$

$$\int_{[a; b]} f^2 = 0 \text{ mais } f \text{ n'est pas nulle.}$$

- Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sev de  $E$ .

La restriction du produit scalaire de  $E$  à  $F \times F$  ie  $\begin{cases} F \times F \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x \mid y) \end{cases}$  est un produit scalaire sur  $F$  qui fait de  $F$  un espace préhilbertien réel.

## 2 Identités remarquables

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y) \tag{1}$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y) \tag{2}$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x\|^2 - \|y\|^2 = (x - y \mid x + y) \tag{3}$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned}
 \forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 &= (x + y \mid x + y) \\
 &= (x \mid x + y) + (y \mid x + y) \text{ avec la linéarité à gauche} \\
 &= (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) \text{ avec la linéarité à droite} \\
 &= \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \text{ avec la symétrie}
 \end{aligned}$$

En remplaçant  $y$  par  $-y$ , on obtient :

$$\forall(x, y) \in E^2 \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x | y) \quad \text{Enfin :}$$

$$\begin{aligned} \forall(x, y) \in E^2 \quad (x + y | x - y) &= (x | x - y) + (y | x - y) \text{ avec la linéarité à gauche} \\ &= (x | x) - (x | y) + (y | x) - (y | y) \text{ avec la linéarité à droite} \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 \text{ avec la symétrie} \end{aligned}$$

**Remarques**

- On peut aussi mentionner l'identité du parallélogramme :  
 $\forall(x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$   
 (Il suffit d'additionner les deux premières égalités ci-dessus)  
 Cette relation signifie que dans un parallélogramme la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés d'où le nom d'identité du parallélogramme.
- Connaissant la norme, on peut reconstituer le produit scalaire : c'est la polarisation :

$$\begin{aligned} \forall(x, y) \in E^2 \quad (x | y) &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \end{aligned}$$

### 3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Théorème**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

$$\forall(x, y) \in E^2 \quad |(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$$

De plus :

$$|(x | y)| = \|x\| \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires}$$

**Cas particuliers**

- On prend  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  ( $a < b$ ) muni du produit scalaire défini par :

$$(f | g) = \int_{[a,b]} f g. \text{ On obtient :}$$

**Proposition**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ .

Pour toutes fonctions  $f$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues on a :

$$\left| \int_{[a,b]} f g \right| \leq \left( \int_{[a,b]} f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{[a,b]} g^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec égalité si et seulement si  $g = \lambda f$  ou  $f = \lambda g$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Démonstration du théorème**

Soit  $(x, y) \in E^2$ .

Si  $y = 0$ , l'inégalité est triviale :

$$(x | y) = (x | 0) = 0 \text{ car } z \mapsto (x | z) \text{ est une application linéaire}$$

$$\|x\| \|y\| = \|x\| \|0\| = 0$$

On suppose donc  $y \neq 0$ , de sorte que  $\|y\|^2 > 0$ .

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (x + \lambda y | x + \lambda y) = \|x + \lambda y\|^2 \geq 0$$

Donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|y\|^2 \lambda^2 + 2(x | y)\lambda + \|x\|^2 \geq 0$$

On a un trinôme du second degré à coefficients réels et de signe constant : son discriminant est négatif.

$$4(x | y)^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

On en déduit facilement :  $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$

Supposons  $|(x | y)| = \|x\| \|y\|$ .

Si  $y = 0$  alors  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

Si  $y \neq 0$  alors le discriminant du trinôme du second degré  $\|y\|^2 \lambda^2 + 2(x | y)\lambda + \|x\|^2$  est nul donc il possède une racine (double)  $\lambda_0$ .

$\|x + \lambda_0 y\|^2 = \|y\|^2 \lambda_0^2 + 2(x | y)\lambda_0 + \|x\|^2$  donc  $x = -\lambda_0 y$  et  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

Réciproquement on suppose  $x$  et  $y$  colinéaires.

Si  $y = 0$  alors comme vu ci-dessus :  $\|x\| \|y\| = (x | y) = 0$ .

Si  $y \neq 0$  alors  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tq  $x = \lambda y$ .

$$|(x | y)| = |(\lambda y | y)| = |\lambda \|y\|^2| = |\lambda| \|y\|^2$$

$$\|x\| \|y\| = \|\lambda y\| \|y\| = |\lambda| \|y\| \|y\| = |\lambda| \|y\|^2$$

Dans les deux cas, il y a bien égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

## 4 Inégalité triangulaire

### Théorème

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

De plus :

$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff x$  et  $y$  sont  $\mathbb{R}_+$ -colinéaires (ie géométriquement : les vecteurs  $x$  et  $y$  sont colinéaires et de même sens)

### Remarques

- L'inégalité précédente signifie que dans un triangle la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés, d'où le nom d'inégalité triangulaire.
- Récapitulons les propriétés de la norme euclidienne.

$$\forall x \in E \quad \|x\| \geq 0 \text{ et } \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

En d'autres termes, la norme euclidienne est une norme (au sens du cours d'analyse).

- Récapitulons les propriétés de la distance euclidienne.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) \geq 0 \text{ et } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(\text{en géométrie : } \forall (A, B) \in E^2 \quad AB \geq 0 \text{ et } AB = 0 \iff A = B)$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(\text{en géométrie : } \forall (A, B) \in E^2 \quad AB = BA)$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$(\text{car } d(x, y) = \|y - x\| = \|y - z + z - x\|)$$

$$(\text{en géométrie : } \forall (A, B, C) \in E^2 \quad AB \leq AC + CB)$$

**Démonstration du théorème**

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|(x | y)| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \text{ par Cauchy-Schwarz} \\
&\leq (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Supposons  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ .

On élève au carré :  $\|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$ .

On en déduit :  $(x | y) = \|x\| \|y\|$ .

En prenant la valeur absolue, on a :  $|(x | y)| = \|x\| \|y\|$  : il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Si  $y = 0$  alors  $y = 0x$  avec  $0 \in \mathbb{R}_+$ .

Si  $y \neq 0$  alors, d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tq  $x = \lambda y$ .

$(x | y) = \|x\| \|y\|$  donne alors :  $\lambda \|y\|^2 = |\lambda| \|y\|^2$ .

$y \neq 0$  donc  $\lambda = |\lambda| \in \mathbb{R}_+$ .

Réciproquement, on suppose  $x$  et  $y$   $\mathbb{R}_+$ -colinéaires.

Si  $y = 0$ ,  $\|x + y\| = \|x\| = \|x\| + \|y\|$ .

Si  $y \neq 0$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tq  $x = \lambda y$ .

$\|x + y\| = \|(1 + \lambda)y\| = |1 + \lambda| \|y\| = (1 + \lambda) \|y\|$

$\|x\| + \|y\| = \|\lambda y\| + \|y\| = |\lambda| \|y\| + \|y\| = (\lambda + 1) \|y\|$ .

## 5 Orthogonalité

### 5.1 Vecteurs orthogonaux

#### 5.1.1 Définition

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$ .

$(x | y) = (y | x)$  donc :  $(x | y) = 0 \iff (y | x) = 0$

On dit que  $x$  et  $y$  sont orthogonaux et on note  $x \perp y$  si et seulement si  $(x | y) = 0$ .

#### 5.1.2 Théorème de Pythagore

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$ .

$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

En effet  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y)$ .

Géométriquement ceci signifie qu'un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .

## 5.2 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

### 5.2.1 Définition

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $E_1$  et  $E_2$  deux sev de  $E$ .

On dit que  $E_1$  et  $E_2$  sont orthogonaux et on note  $E_1 \perp E_2$  si et seulement si :

$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad x_1 \perp x_2$  (ie : tout élément de  $E_1$  est orthogonal à tout élément de  $E_2$ )

On a aussi :

$$E_1 \perp E_2 \iff \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad (x_1 | x_2) = 0$$

### 5.2.2 Somme directe orthogonale

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sev orthogonaux de  $E$ .

Soit  $x \in E_1 \cap E_2$ .

$x \in E_1$  et  $x \in E_2$  donc  $x \perp x$  ie  $(x | x) = 0$ .

D'où  $x = 0$ .

Donc  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$  et la somme  $E_1 + E_2$  est directe.

Plus généralement on a :

#### Proposition

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

Soit  $I$  un ensemble fini et  $(E_i)_{i \in I}$  une famille de sev de  $E$  deux à deux orthogonaux

(ie :  $\forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \Rightarrow E_i \perp E_j$ ).

Alors la somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe.

On note  $\sum_{i \in I} E_i = \bigoplus_{i \in I} E_i = \bigoplus_{i \in I} E_i$  (somme directe orthogonale des  $E_i$ ).

#### Démonstration

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs telle que :

$\forall i \in I \quad x_i \in E_i$

$$\sum_{i \in I} x_i = 0$$

$$\begin{aligned} \forall i \in I \quad \left( x_i \mid \sum_{j \in I} x_j \right) &= (x_i | 0) = 0 \\ &= \sum_{j \in I} (x_i | x_j) = \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} (x_i | x_j) \\ &= \|x_i\|^2 \quad \text{car } E_i \perp E_j \text{ si } j \neq i \end{aligned}$$

Donc tous les  $x_i$  sont nuls.

La somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est bien directe.

## 5.3 Orthogonal d'un sev

### 5.3.1 Orthogonal d'un vecteur

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $x \in E$ .

On appelle orthogonal de  $x$  et on note  $x^\perp$  l'ensemble des vecteurs orthogonaux à  $x$  ie :

$$x^\perp = \{y \in E \text{ tq } x \perp y\} = \{y \in E \text{ tq } (x | y) = 0\}.$$

Si  $x = 0$  on a  $x^\perp = 0^\perp = E$ .

$$\text{Si } x \neq 0 \text{ soit } \varphi \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto (x | y) \end{cases}.$$

$\varphi$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x^\perp = \text{Ker } \varphi$ .

$x^\perp$  est donc un sous-espace vectoriel de  $E$ .

$\varphi$  est non nulle ( $\varphi(x) = \|x\|^2 > 0$ ) donc l'image de  $\varphi$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}$  non réduit à  $\{0\}$ . C'est donc  $\mathbb{R}$  ie  $\varphi$  est surjective.

Si  $E$  est de dimension finie  $n$  alors  $x^\perp$  est de dimension  $n - 1$  (par application de la formule du rang).

Que  $E$  soit de dimension finie ou infinie, que  $x$  soit nul ou pas, on a :

$$E = \mathbb{R}x \oplus x^\perp.$$

En effet :

soit  $y \in \mathbb{R}x$  et  $z \in x^\perp$ .

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } y = \lambda x$$

$$(y | z) = \lambda(x | z) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Donc  $\mathbb{R}x \perp x^\perp$ .

$$\text{Si } x = 0 \text{ alors } \mathbb{R}x \oplus x^\perp = \{0\} \oplus E = E.$$

On suppose  $x \neq 0$ .

Soit  $y \in E$ .

$$\text{On pose } z = y - \frac{(y | x)}{\|x\|^2}x.$$

$$(z | x) = (y | x) - \frac{(y | x)}{\|x\|^2}(x | x) = (y | x) - (y | x) = 0 \text{ donc } z \perp x.$$

$$\text{Donc } y = \frac{(y | x)}{\|x\|^2}x + z \in \mathbb{R}x \oplus x^\perp.$$

### 5.3.2 Orthogonal d'un sev

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sev de  $E$ .

On appelle orthogonal de  $F$  et on note  $F^\perp$  l'ensemble des vecteurs de  $E$  orthogonaux à tous les vecteurs de  $F$ .

$$\text{On a donc : } F^\perp = \{y \in E \text{ tq } \forall x \in F \ x \perp y\} = \{y \in E \text{ tq } \forall x \in F \ (x | y) = 0\} = \bigcap_{x \in F} x^\perp.$$

On en déduit que  $F^\perp$  est un sev de  $E$ .

$$\text{Comme on a clairement } F \perp F^\perp \text{ on a } F \cap F^\perp = \{0\} \text{ et } F + F^\perp = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp.$$

Soit  $G$  un sev de  $E$ .

On a :

$$F \perp G \iff G \subset F^\perp$$

$F^\perp$  est le plus grand (au sens de l'inclusion) sev de  $E$  orthogonal à  $F$ .

#### Exemple

$$E^\perp = \{0\}$$

## 5.4 Supplémentaires orthogonaux

### 5.4.1 Définition

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

Deux sev  $F$  et  $G$  de  $E$  sont dits supplémentaires orthogonaux si et seulement si on a  $E = F \oplus G$

On va montrer qu'on a alors  $G = F^\perp$  (et  $F = G^\perp$ ).

$E = F \oplus G$  donc  $G \perp F$  et  $G \subset F^\perp$

Soit  $x \in F^\perp$ .

$E = F \oplus G$  donc :

$\exists (x_F, x_G) \in F \times G$  tq  $x = x_F + x_G$ .

$x_F = x - x_G$  avec  $x \in F^\perp$  et  $x_G \in G \subset F^\perp$  donc  $x_F \in F^\perp$ .

Comme  $x_F$  appartient aussi à  $F$ ,  $x_F = 0$  et  $x = x_G \in G$ .

D'où  $F^\perp \subset G$ .

On en déduit  $(F^\perp)^\perp$  noté  $F^{\perp\perp} = F$

### 5.4.2 Supplémentaire orthogonal d'un sev

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sev de  $E$ .

On dit que  $F$  admet un supplémentaire orthogonal si et seulement si il existe  $G$  sev de  $E$  tel que  $F \oplus G = E$ .

D'après ce qui précède si  $F$  possède un supplémentaire orthogonal il est unique car c'est  $F^\perp$ . On dit alors que  $F^\perp$  est le supplémentaire orthogonal de  $F$ .  $F$  est alors le supplémentaire orthogonal de  $F^\perp$  et on a  $F = F^{\perp\perp}$ . Mais en général un sev de  $E$  n'a pas de supplémentaire orthogonal ie en général  $F \oplus F^\perp \subsetneq E$ .

#### Exemple (Mines 2004) :

On définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  par :

$$(P | Q) = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$$

Soit  $F = X \mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes qui admettent zéro comme racine. Que dire de  $F^\perp$  ?

Soit  $P \in F^\perp$ .

Le polynôme  $XP$  appartient à  $F$  donc  $(XP | P) = \int_0^1 tP(t)^2 dt = 0$ .

Mais la fonction  $t \mapsto tP(t)^2$  est continue et positive donc :

$$\forall t \in [0; 1] tP(t)^2 = 0$$

$P$  a donc une infinité de racines et  $P = 0$ .

On a donc  $F^\perp = \{0\}$  et  $F \oplus F^\perp = F \subsetneq \mathbb{R}[X]$ .

### 5.4.3 Projecteurs orthogonaux

#### Définition

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

On appelle projecteur orthogonal de  $E$  tout projecteur  $p \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p.$$

Comme on sait que pour un projecteur on a  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$  on peut écrire :  
 Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ .

$$p \text{ est un projecteur orthogonal } \iff \begin{cases} p^2 = p \\ \text{Ker } p \perp \text{Im } p \end{cases}$$

Soit  $F$  un sev de  $E$ .

Si  $F$  possède un supplémentaire orthogonal, on peut définir la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ . C'est une projection orthogonale qu'on appellera simplement projection orthogonale sur  $F$ .

#### 5.4.4 Cas d'un sev de dimension finie

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sev de  $E$  de dimension finie.  
 $F \oplus F^\perp = E$

##### Démonstration

Soit  $x \in E$ .

$$\text{Soit } f \begin{cases} F \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \|x - y\|^2 = \|y - x\|^2 \end{cases} .$$

$f$  est continue et :

$$\forall y \in F \quad \|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

Donc :

$$\forall y \in F \quad f(y) \geq \|y\| - \|x\|$$

$$\text{D'où } f(y) \xrightarrow{\|y\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

Il existe  $R \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall y \in F \quad \|y\| \geq R \implies f(y) \geq f(0).$$

La fonction  $f$  est continue sur  $K = \{y \in F \text{ tq } \|y\| \leq R\}$  qui est une partie fermée, bornée et non vide de  $F$ .

Comme  $F$  est de dimension finie, il existe  $y_0 \in K$  tel que :

$$\forall y \in K \quad f(y) \geq f(y_0)$$

En particulier  $f(0) \geq f(y_0)$  car  $0 \in K$

On considère alors  $y$  un élément de  $F$ .

Si  $y \in K$  alors  $f(y) \geq f(y_0)$ .

Si  $y \notin K$  alors  $\|y\| > R$  et  $f(y) \geq f(0) \geq f(y_0)$ .

On a donc :

$$\forall y \in F \quad f(y) \geq f(y_0)$$

On verra plus tard que cela entraîne la nullité du gradient de  $f$  en  $y_0$  et comment calculer ce gradient.

Pour l'instant, en l'absence de calcul différentiel, on peut procéder ainsi :

Soit  $y \in F$ .

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(y_0 + ty)^2 \geq f(y_0)^2$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \|y_0 - x + ty\|^2 \geq \|y_0 - x\|^2$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \|y_0 - x\|^2 + 2t(y_0 - x | y) + t^2 \|y\|^2 \geq \|y_0 - x\|^2$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 2t(y_0 - x | y) + t^2 \|y\|^2 \geq 0$$

Si  $y$  est nul alors  $(y_0 - x | y) = 0$

Si  $y$  est non nul, on a un trinôme du second degré de signe constant donc :

$$\Delta = 4(y_0 - x | y)^2 \leq 0$$

On en déduit  $(y_0 - x | y) = 0$ .

Donc  $y_0 - x \in F^\perp$  et  $x = y_0 + x - y_0 \in F \oplus F^\perp$ .

$F \oplus F^\perp = E$  donc on peut définir la projection orthogonale sur  $F$ , qu'on note  $p$ .

Avec les notations de la démonstration  $p(x) = y_0$  et on a :

$$\forall x \in E \forall y \in F \quad \|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$$

On a même :

$$\forall x \in E \forall y \in F \setminus \{p(x)\} \quad \|x - y\| > \|x - p(x)\|$$

En effet, si on reprend la démonstration, on voit que si  $y_1 \in F$  vérifie :

$$\forall y \in F \quad \|x - y\| \geq \|x - y_1\|$$

alors  $x - y_1 \perp F$  donc  $x = y_1 + x - y_1$  avec  $y_1 \in F$  et  $x - y_1 \in F^\perp$  ce qui entraîne  $y_1 = y_0 = p(x)$ .

On retrouve également avec Pythagore, la formule vue en Sup :

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + d(x, F)^2$$

### Dimensions

Soit  $E$  un espace euclidien.

Soit  $F$  un sev de  $E$ .

On a :

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp \text{ et } F = F^{\perp\perp}.$$

En effet  $F$  est de dimension finie comme sev d'un ev de dimension finie donc :

$$E = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp.$$

D'où  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ .

En particulier, si  $F$  est un hyperplan de  $E$ ,  $F^\perp$  est une droite.

On appelle vecteur normal à  $F$  tout vecteur non nul de cette droite.

Il n'y a pas unicité d'un vecteur normal à  $F$ , même en le prenant unitaire, mais les vecteurs normaux à  $F$  sont tous colinéaires.

### Exemples

- Déterminer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ .

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ .

On définit un produit scalaire sur  $E$  en posant :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad (P | Q) = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$$

(vérifications faciles)

$$\text{On a alors : } \int_0^1 (x^2 - ax + b)^2 dx = \|X^2 - (aX + b)\|^2.$$

$F = \text{Vect}(1, X)$  étant un sous-espace de dimension finie de  $E$ ,  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$  est en fait un minimum atteint une fois et une seule lorsque  $aX + b$  est le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $F$ .

Ce projeté orthogonal est caractérisé par 
$$\begin{cases} aX + b \in F \\ X^2 - (aX + b) \perp F \end{cases} .$$

On doit donc résoudre le système  $\begin{cases} (X^2 - (aX + b) | 1) = 0 \\ (X^2 - (aX + b) | X) = 0 \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} a(X | 1) + b(1 | 1) = (X^2 | 1) \\ a(X | X) + b(1 | X) = (X^2 | X) \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{4} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6}b = \frac{1}{36} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1 \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

La borne inférieure cherchée est alors :

$$\begin{aligned} d &= \|X^2 - (aX + b)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|aX + b\|^2 \text{ par Pythagore} \\ &= \frac{1}{5} - a^2\|X\|^2 - 2ab(1 | X) - b^2\|1\|^2 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{180} \end{aligned}$$

- $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$  est muni du produit scalaire défini par  $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ .

Soit  $F = \left\{ f \in E \text{ tq } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$ .

Déterminer  $F^\perp$ .

Soit  $f_0 \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 1 \end{cases}$ .

$F = f_0^\perp = (\mathbb{R}f_0)^\perp$  avec  $\mathbb{R}f_0$  sev de dimension finie de  $E$ .

Donc  $F^\perp = (\mathbb{R}f_0)^{\perp\perp} = \mathbb{R}f_0$ .

## 6 Bases orthonormées

### 6.1 Familles orthogonales

#### 6.1.1 Définitions

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $E$ .

On dit que la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est orthogonale si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in I^2 \ i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j$$

On dit que la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est orthonormale si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{elle est orthogonale} \\ \forall i \in I \ \|e_i\| = 1 \end{cases}$$

### 6.1.2 Propriétés

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

- **Relation de Pythagore**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille orthogonale de  $E$ .

On a :

$$\|e_1 + \dots + e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \dots + \|e_n\|^2$$

(Si  $n \geq 3$  la réciproque est fausse)

Plus généralement si  $I$  est un ensemble fini non vide et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille orthogonale

on a :

$$\left\| \sum_{i \in I} e_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|e_i\|^2$$

**Démonstration**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille orthogonale de  $E$ .

$$\begin{aligned} \|e_1 + \dots + e_n\|^2 &= \left( \sum_{i=1}^n e_i \mid \sum_{i=1}^n e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (e_i \mid e_j) = \sum_{i=1}^n (e_i \mid e_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_i \mid e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \end{aligned}$$

Si  $n \geq 3$ ,  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_i \mid e_j)$  contient  $\frac{n(n-1)}{2} \geq 3$  termes. Elle peut donc être nulle sans que chaque terme soit nul.

- Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.  
On en déduit que toute famille orthonormale est libre.

**Démonstration**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille orthogonale de vecteurs non nuls de  $E$ .

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tq  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ .

$$\left( e_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) = (e_i \mid 0) = 0$$

Mais  $\left( e_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (e_i \mid e_j) = \lambda_i \|e_i\|^2$  avec  $\|e_i\|^2 \neq 0$  donc  $\lambda_i = 0$ .

La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est bien libre.

## 6.2 Bases orthonormales

### 6.2.1 Définition

Soit  $E$  un espace euclidien.

On appelle base orthonormale (ou orthonormée) de  $E$  toute base de  $E$  qui est en même temps

une famille orthonormale.

**Exemple**

On considère  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  ( $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  le 1 étant en  $i^{\text{ième}}$  position).

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$  tels que  $i \neq j$ .

$$(e_i | e_j) = 0.0 + \dots + 1.0(i) + 0.0 + \dots + 0.1(j) + 0.0 + \dots + 0.0 = 0$$

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket (e_i | e_i) = 0.0 + \dots + 0.0 + 1.1(i) + 0.0 + \dots + 0.0 = 1$$

La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormée.

La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est donc une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  (muni de sa structure euclidienne canonique).

**Remarque**

Soient  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de  $n$  éléments de  $E$ .

On a :

$(e_1, \dots, e_n)$  BON de  $E \iff$  les  $e_i$  sont unitaires et 2 à 2 orthogonaux.

(En effet une famille ON est libre et toute famille libre de  $n$  vecteurs de  $E$  est une base de  $E$ )

**6.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de  $E$  espace préhilbertien réel.

D'après les paragraphes précédents, on peut définir pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ . On la note  $p_k$ .

La famille  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  définie par :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = e_1 \\ \forall k \in \{2; \dots; n\} \epsilon_k = e_k - p_{k-1}(e_k) \end{cases}$$

est une famille orthogonale de vecteurs non nuls vérifiant en outre :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{Vect}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

On l'appelle orthogonalisée de Gram-Schmidt de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

La famille  $\left( \frac{\epsilon_1}{\|\epsilon_1\|}, \dots, \frac{\epsilon_n}{\|\epsilon_n\|} \right) = (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n)$  est une famille orthonormée vérifiant en outre :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{Vect}(\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

On l'appelle orthonormalisée de Gram-Schmidt de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

**6.4 Cas d'un espace de dimension finie**

**6.4.1 Existence de BON**

**Proposition**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Alors  $E$  possède au moins une BON.

En effet si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  (donc une famille libre) son orthonormalisée  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  est une BON de  $E$ .

**6.4.2 Théorème de la BON incomplète**

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$  et  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p \leq n - 1$ .

Soit  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$  une famille orthonormale de  $E$ .

Alors il existe  $\epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_n$   $n - p$  éléments de  $E$  tels que  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  soit une BON de  $E$ .

En effet, il existe  $e_{p+1}, \dots, e_n$  dans  $E$  tels que  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  soit une base de  $E$  (donc une famille libre). Il ne reste plus alors qu'à orthonormaliser cette famille (ce qui laisse inchangés  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ ).

### 6.4.3 Proposition

Soit  $E$  un ev euclidien de dimension  $\geq 2$ .

Soit  $F$  un sev de  $E$  de dimension  $p$  avec  $1 \leq p \leq n - 1$ .

Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  une BON de  $F$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une BON de  $F^\perp$ .

Alors  $(e_1, \dots, e_n)$  est une BON de  $E$ .

#### Démonstration

On a clairement :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \|e_i\| = 1$

Soient  $i$  et  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$  distincts.

Si  $i$  et  $j \in \{1; \dots; p\}$ ,  $(e_i | e_j) = 0$  car  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$ .

Si  $i$  et  $j \in \{p+1; \dots; n\}$ ,  $(e_i | e_j) = 0$  car  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $F^\perp$ .

Si un des deux appartient à  $\{1; \dots; p\}$  et l'autre à  $\{p+1; \dots; n\}$ ,  $(e_i | e_j) = 0$  car  $F \perp F^\perp$ .

$(e_1, \dots, e_n)$  est une famille orthonormée de  $n$  vecteurs de  $E$  de dimension  $n$  donc c'est une base orthonormée de  $E$ .

Plus généralement on a :

#### Proposition

Soient  $E$  un ev euclidien et  $E_1, \dots, E_n$   $n$  sev de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  on pose  $d_i = \dim E_i$  qu'on suppose  $\geq 1$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_{d_1})$  une BON de  $E_1$ .

Soit  $(e_{d_1+1}, \dots, e_{d_1+d_2})$  une BON de  $E_2$ .

⋮

Soit  $(e_{d_1+\dots+d_{n-1}+1}, \dots, e_{d_1+\dots+d_n=\dim E})$  une BON de  $E_n$ .

Alors  $(e_1, \dots, e_{\dim E})$  est une BON de  $E$ .

### 6.4.4 Expression du produit scalaire dans une BON d'un espace euclidien

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une BON de  $E$ .

Soient  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$  et  $X$  la matrice colonne de ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$ .

Soient  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$  et  $Y$  la matrice colonne de ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$ .

On a :

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t X Y$$

On en déduit :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{{}^t X X}$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

On a de plus :

$$(e_i | x) = \sum_{j=1}^n x_j (e_i | e_j) = x_i \|e_i\|^2 = x_i$$

On peut donc écrire :

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$$

Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$  alors :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^n (e_i | f(e_j)) e_i$$

Donc la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est la matrice  $((e_i | f(e_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

En particulier, la trace de  $f$  est  $\sum_{i=1}^n (e_i | f(e_i))$ .

### Exemple

#### Centrale maths 2 2018

On considère l'application  $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N) \end{cases}$ .

1. Montrer que c'est un produit scalaire.

Que dire de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

2. Soient  $E$  un espace euclidien et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Exprimer  $\text{tr}(f)$  avec une base orthonormée de  $E$ .

3. On se place dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

Soit  $\varphi_A$  définie par  $\varphi_A(M) = AM + MA$ .

- (a) Ecrire un programme donnant  $\text{tr}(\varphi_A)$ .

(On écrira au préalable une fonction définissant le produit scalaire de la première question).

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

```
def ps(M,N):
    MT=np.transpose(M)
    MTN=np.dot(MT,N)
    return np.trace(MTN)
```

```
def tr(A):
    n=len(A)
    s=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            E=np.zeros((n,n))
            E[i,j]=1
            phiAE=np.dot(A,E)+np.dot(E,A)
            s+=ps(E,phiAE)
```

```
return s
```

- (b) Calculer  $\text{tr}(\varphi_A)$  pour  $A = A_1, A_2$  et  $A_3$ .

$$A_1 \text{ ressemblait à } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il fallait faire une conjecture.

La suite portait sur des projecteurs.

### Correction

- Produit scalaire : traité plus haut.  
La base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthonormée.

$$2. \text{tr}(f) = \sum_{i=1}^n (e_i | f(e_i))$$

- (a) 

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

```
def ps(M,N):
    MT=np.transpose(M)
    MTN=np.dot(MT,N)
    return np.trace(MTN)
```

```
def tr(A):
    n=len(A)
    s=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            E=np.zeros((n,n))
            E[i,j]=1
            phiAE=np.dot(A,E)+np.dot(E,A)
            s+=ps(E,phiAE)
    return s
```

- (b) 

```
A=np.array([[1,1,-1,0],[1,1,-1,0],[1,1,-1,0],[-1,-1,1,0]])
print(tr(A),np.trace(A))
```

(c)

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\varphi_A) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E_{i,j} | \varphi_A(E_{i,j})) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{tr}(E_{j,i}(AE_{i,j} + E_{i,j}A)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{tr}(E_{j,i}AE_{i,j}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{tr}(E_{j,i}E_{i,j}A) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{tr}(AE_{i,j}E_{j,i}) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \text{tr}(E_{j,j}A) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{tr}(AE_{i,i}) + n \sum_{j=1}^n \text{tr}(E_{j,j}A) \\
 &= n \sum_{i=1}^n \text{tr}(AE_{i,i}) + n \sum_{j=1}^n \text{tr}(E_{j,j}A) \\
 &= 2n \sum_{i=1}^n a_{i,i} \\
 &= 2n \text{tr}(A)
 \end{aligned}$$

#### 6.4.5 Retour sur les projections orthogonales

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une BON de  $F$ .

$$\forall x \in E \quad p(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in E \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \left( e_i | x - \sum_{j=1}^n (e_j | x) e_j \right) &= (e_i | x) - \sum_{j=1}^n (e_j | x) (e_i | e_j) \\
 &= (e_i | x) - (e_i | x) \|e_i\|^2 \quad \text{car les autres termes sont nuls} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc  $x - \sum_{j=1}^n (e_j | x) e_j \perp F$  car il est orthogonal aux vecteurs d'une base de  $F$ .

$$\text{Donc } x = \left( \sum_{j=1}^n (e_j | x) e_j \in F \right) + \left( x - \sum_{j=1}^n (e_j | x) e_j \in F^\perp \right).$$

## 7 Isométries vectorielles

### 7.1 Définition

Un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.

C'est la définition du programme, on peut l'expliciter ainsi :

Soient  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .  
 $u$  isométrie vectorielle  $\iff \forall x \in E \ \|u(x)\| = \|x\|$

La présence d'une racine carrée peut compliquer les vérifications. Il est souvent plus commode d'utiliser le carré de la norme. On a de manière immédiate :

Soient  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .  
 $u$  isométrie vectorielle  $\iff \forall x \in E \ \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$

### 7.2 Exemple : les symétries orthogonales

#### 7.2.1 Définition

Soit  $E$  un ev euclidien.

Soit  $s$  une symétrie de  $E$ . (Rappel :  $s$  est la symétrie par rapport à  $F = \text{Ker}(s - Id_E)$  parallèlement à  $G = \text{Ker}(s + Id_E)$  avec  $E = F \oplus G$ )

On dit que  $s$  est une symétrie orthogonale si et seulement si :

$$E = \text{Ker}(s - Id_E) \oplus \text{Ker}(s + Id_E) = F \oplus G$$

On dit alors que  $s$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $F = \text{Ker}(s - Id_E)$ .

#### 7.2.2 Caractérisation des symétries orthogonales parmi les symétries

Soient  $E$  un ev euclidien et  $s$  une symétrie de  $E$ .

$s$  est une symétrie orthogonale  $\iff s$  est une isométrie vectorielle.

#### Démonstration

•  $\implies$

Soit  $x \in E$ .

$$\exists!(x_F, x_G) \in F \times G \text{ tq } x = x_F + x_G.$$

$$s(x) = x_F - x_G$$

$$\begin{aligned} \|s(x)\|^2 &= \|x_F - x_G\|^2 \\ &= \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 \text{ Pythagore } F \perp G \text{ donc } x_F \perp -x_G \\ &= \|x_F + x_G\|^2 \text{ même principe} \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

$s$  conserve la norme et  $s \in \mathcal{L}(E)$  donc  $s$  est une isométrie vectorielle.

•  $\impliedby$

Il s'agit uniquement de prouver  $F \perp G$  : on sait déjà que  $E = F \oplus G$

Soient  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

$$\|s(x_F + x_G)\|^2 = \|x_F + x_G\|^2$$

$$\text{Donc } \|s(x_F) + s(x_G)\|^2 = \|x_F + x_G\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \|x_F - x_G\|^2 &= \|x_F + x_G\|^2 \\ \text{Donc } \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 - 2(x_F|x_G) &= \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 + 2(x_F|x_G) \\ \text{Donc } (x_F|x_G) &= 0. \end{aligned}$$

### 7.2.3 Cas particulier : les réflexions

Soient  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \geq 2$  et  $H$  un hyperplan de  $E$ .  
On appelle réflexion d'hyperplan  $H$  la symétrie orthogonale par rapport à  $H$ .

#### Expression vectorielle

Soit  $s$  la réflexion par rapport à  $H$ .

Soient  $a$  un vecteur unitaire normal à  $H$ .

On cherche une expression de  $s(x)$  où  $x \in E$ .

Soit  $x \in E$ .

On a  $x + s(x) \in H = a^\perp$  et  $x - s(x) \in \mathbb{R}a$ .

D'où :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } x - s(x) = \lambda a$$

$$s(x) = x - \lambda a$$

$$x + s(x) = 2x - \lambda a$$

Mais  $x + s(x) \in a^\perp$  donc  $(2x - \lambda a|a) = 0$

$$2(x|a) - \lambda \|a\|^2 = 0$$

$$\text{Donc } \lambda = 2 \frac{(a|x)}{\|a\|^2} \text{ et :}$$

$$s(x) = x - 2 \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a : \text{ expression générale dans le cas où on suppose simplement } a \neq 0$$

$$s(x) = x - 2(a|x)a \text{ ici car on suppose } \|a\| = 1.$$

### 7.3 Automorphismes orthogonaux

Soient  $E$  un ev euclidien et  $u$  une isométrie vectorielle.

Soit  $x \in \text{Ker } u$ .

$$\|x\|^2 = \|u(x)\|^2 = \|0\|^2 = 0 \text{ donc } x = 0.$$

$\text{Ker } u = \{0\}$  donc  $u$  est injective.

Mais  $E$  est de dimension finie donc  $u$  est bijective et  $u$  est un automorphisme de  $E$  (ie  $u \in GL(E)$ ).

Les isométries vectorielles de  $E$  sont des automorphismes de  $E$ . Bien entendu, la réciproque est fautive (cf  $u = \lambda id$  avec  $\lambda \neq -1, 0, 1$ ).

Les isométries vectorielles sont aussi appelées **automorphismes orthogonaux**.

Je cite le programme :

On mentionne la terminologie "automorphisme orthogonal" tout en lui préférant celle d'"isométrie vectorielle".

### 7.4 Caractérisation des isométries vectorielles par la conservation du produit scalaire

Soient  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

$$u \text{ isométrie vectorielle} \iff \forall (x, y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$$

En d'autres termes les isométries vectorielles de  $E$  sont les endomorphismes de  $E$  qui conservent le produit scalaire.

**Démonstration**

- $\implies$   
 Soit  $(x, y) \in E^2$ .  
 $\|u(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2$  car  $u$  est une isométrie vectorielle.  
 $\|u(x) + u(y)\|^2 = \|x + y\|^2$   
 $\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 + 2(u(x)|u(y)) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$   
 On simplifie et il reste  $(u(x)|u(y)) = (x|y)$
- $\impliedby$  : trivial  
 $\forall x \in E \ \|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|x) = \|x\|^2$   
 Donc  $u$  est une isométrie vectorielle.

**7.5 Remarques**

- Si  $u$  est une isométrie vectorielle de  $E$  alors  $u$  conserve les distances :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \ d(u(x), u(y)) &= \|u(y) - u(x)\| = \|u(y - x)\| \\ &= \|y - x\| = d(x, y) \end{aligned}$$

Réciproquement si  $u$  conserve les distances et si  $u(0) = 0$  alors  $u$  est un automorphisme orthogonal.

**Centrale 2003**

Soient  $E$  un ev euclidien et  $u : E \rightarrow E$  telle que  $u(0) = 0$  et  $\forall (x, y) \in E^2 \ \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ .

1. (a) Montrer :  $\forall x \in E \ \|u(x)\| = \|x\|$   
 (b) Montrer :  $\forall (x, y) \in E^2 \ \langle u(x)|u(y) \rangle = \langle x|y \rangle$   
 (c) Montrer :  $\forall x \in E \ u(x) = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle u(e_i)$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  est une BON de  $E$ .  
 (d) Montrer que  $u$  est un automorphisme orthogonal.
2. Soit  $u : E \rightarrow E$  telle que  $\forall (x, y) \in E^2 \ \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ .  
 Montrer que  $u$  est une isométrie affine<sup>1</sup>.

**Correction**

1. (a)  $\forall x \in E \ \|u(x)\| = \|u(x) - 0\| = \|u(x) - u(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$   
 $u$  conserve la norme.  
 (b)  $\forall (x, y) \in E^2 \ \|u(x) - u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - 2(u(x)|u(y))$   
 $\forall (x, y) \in E^2 \ \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$   
 On égalise et il reste :  
 $\forall (x, y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$   
 $u$  conserve le produit scalaire.

---

1. cette notion n'est plus au programme

(c)

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket (u(e_i)|u(e_j)) &= (e_i|e_j) \text{ d'après la question précédente} \\ &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

$(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une famille ON de  $E$ .

Vu le nombre de vecteurs, c'est une BON de  $E$ .

Donc :

$$\forall x \in E \quad u(x) = \sum_{i=1}^n (u(x)|u(e_i))u(e_i) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)u(e_i)$$

(d) Sous cette forme, la linéarité de  $u$  est à peu près claire.

$u$  est donc un endomorphisme de  $E$  qui conserve le produit scalaire.

$u$  est un automorphisme orthogonal.

2. Soit  $v = t_{-u(0)} \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x - u(0) \end{cases}$

Soit  $w = v \circ u \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto u(x) - u(0) \end{cases}$

$w(0) = 0$

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \quad \|w(x) - w(y)\| &= \|u(x) - u(0) - (u(y) - u(0))\| = \|u(x) - u(y)\| \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

D'après ce qui précède,  $w$  est un automorphisme orthogonal de  $E$ .

Donc  $u = v^{-1} \circ w = t_{u(0)} \circ w$  est une isométrie affine (comme composée de deux applications affines).

Par contre,  $u$  n'est pas forcément un automorphisme orthogonal ( $u$  n'est pas forcément linéaire), c'est le cas en particulier des translations (de vecteur non nul).

- Soient  $E$  un ev euclidien et  $u$  une application de  $E$  dans  $E$  qui conserve le produit scalaire. Alors  $u$  est linéaire.

(Cf 1.(c) et (d) de l'exercice précédent)

On peut dire que les automorphismes orthogonaux de  $E$  sont les applications de  $E$  dans  $E$  qui conservent le produit scalaire.

- Si  $u : E \rightarrow E$  conserve uniquement la norme  $u$  n'est pas forcément un automorphisme orthogonal.

Par exemple soient  $a \in E \setminus \{0\}$  et  $u \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \text{ si } x \neq a \\ a \mapsto -a \end{cases}$ .

- **Conservation de l'orthogonalité**

**Mines 2018**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $s$  un endomorphisme de  $E$ .

Montrer l'équivalence entre les assertions :

(i) il existe un réel  $\lambda$  tel que pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\langle s(x), s(y) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

(ii) pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\langle x, y \rangle = 0 \implies \langle s(x), s(y) \rangle = 0$

**Correction**

— (i)  $\implies$  (ii)

Trivial.

— (ii)  $\implies$  (i)

Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs non nuls de  $E$ .

$y = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x + z$  avec  $z$  orthogonal à  $x$  (penser au cours sur les projections orthogonales).

$$s(y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} s(x) + s(z)$$

D'après (ii),  $z$  est orthogonal à  $x$  donc  $s(z)$  est orthogonal à  $s(x)$ .

$$\text{Donc } \langle s(x), s(y) \rangle = \frac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2} \langle x, y \rangle$$

$$\text{On peut inverser le rôle de } x \text{ et de } y \text{ donc : } \langle s(x), s(y) \rangle = \frac{\|s(y)\|^2}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle$$

$$\text{On a donc : } \frac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2} \langle x, y \rangle = \frac{\|s(y)\|^2}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle.$$

$$\text{Si } x \text{ et } y \text{ ne sont pas orthogonaux alors } \frac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|s(y)\|^2}{\|y\|^2}.$$

Supposons  $x$  et  $y$  orthogonaux.

$$\langle x, x+y \rangle = \|x\|^2 > 0 \text{ et } \langle y, x+y \rangle = \|y\|^2 > 0 \text{ donc :}$$

$$\frac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|s(x+y)\|^2}{\|x+y\|^2} = \frac{\|s(y)\|^2}{\|y\|^2}$$

Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \frac{\|s(x)\|^2}{\|x\|^2} = \lambda$$

On a alors, pour tous  $x$  et  $y \in E \setminus \{0\}$ ,  $\langle s(x), s(y) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

C'est trivial si  $x$  ou  $y = 0$ .

### Autre méthode

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une BON de  $E$ .

Si  $i \neq j$ ,  $(e_i | e_j) = 0$  donc  $(s(e_i) | s(e_j)) = 0$ .

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \quad (s(x) | s(y)) &= \left( s \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \mid s \left( \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i s(e_i) \mid \sum_{i=1}^n y_i s(e_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \|s(e_i)\|^2 \text{ vue la remarque initiale} \end{aligned}$$

Mais pour  $i \neq j$  :

$$\begin{aligned} \|s(e_i)\|^2 - \|s(e_j)\|^2 &= (s(e_i) - s(e_j) | s(e_i) + s(e_j)) \\ &= (s(e_i - e_j) | s(e_i + e_j)) \\ &= 0 \text{ car } e_i + e_j \perp e_i - e_j \end{aligned}$$

D'où le résultat avec  $\lambda = \|s(e_i)\|^2$ .

### Remarque

$\lambda \geq 0$  : c'est évident avec la deuxième méthode et avec la première, on prend  $x = y$

et on a  $\|s(x)\|^2 = \lambda \|x^2\|$ .  
 Si  $\lambda = 0$  alors  $s = 0$ .  
 Si  $\lambda > 0$  :  $\frac{s}{\sqrt{\lambda}} \in O(E)$ .

## 7.6 Caractérisation des isométries vectorielles par l'image des BON

### 7.6.1 Proposition

Soient  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Il y a équivalence entre :

- i  $u$  est une isométrie vectorielle de  $E$
- ii  $\exists (e_1, \dots, e_n)$  BON de  $E$  tq  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  soit une BON de  $E$
- iii pour toute BON  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ ,  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une BON de  $E$

### Démonstration

**i**  $\implies$  **iii** Cf la question 1.c. de l'exercice de Centrale du paragraphe 5.1.6.

**iii**  $\implies$  **ii** trivial

**ii**  $\implies$  **i** Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ .

$u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$  et  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une BON de  $E$  donc :

$$\|u(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|$$

$u$  est un endomorphisme de  $E$  qui conserve la norme donc  $u$  est une isométrie vectorielle de  $E$ .

### 7.6.2 Corollaire

Soit  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  2 BON de  $E$ .

Il existe une et une seule isométrie vectorielle  $u$  de  $E$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket u(e_i) = \epsilon_i$$

En effet  $(e_1, \dots, e_n)$  étant une base de  $E$  on sait qu'il existe un et un seul endomorphisme  $u$  de  $E$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket u(e_i) = \epsilon_i$$

et d'après ce qui précède  $u$  est alors une isométrie vectorielle.

## 7.7 Groupe orthogonal

Soit  $E$  un ev euclidien.

On appelle groupe orthogonal de  $E$  et on note  $O(E)$  l'ensemble des automorphismes orthogonaux de  $E$ .

Les propriétés essentielles du groupe orthogonal sont :

- $O(E) \subset GL(E)$
- $O(E) \neq \emptyset$  car  $Id_E \in O(E)$

- **Stabilité par  $\circ$  :**  
Soit  $(u, v) \in \mathcal{O}(E)^2$ .

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \quad (u \circ v(x) | u \circ v(y)) &= (u(v(x)) | u(v(y))) \\ &= (v(x) | v(y)) \text{ car } u \in \mathcal{O}(E) \\ &= (x | y) \text{ car } v \in \mathcal{O}(E) \end{aligned}$$

Donc  $u \circ v \in \mathcal{O}(E)$  et  $\mathcal{O}(E)$  est stable par  $\circ$ .

- **Stabilité par passage à l'inverse**  
Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ .

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \quad (u^{-1}(x) | u^{-1}(y)) &= (u(u^{-1}(x)) | u(u^{-1}(y))) \text{ car } u \in \mathcal{O}(E) \\ &= (x | y) \end{aligned}$$

Donc  $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$  et  $\mathcal{O}(E)$  est stable par passage à l'inverse.

## 7.8 Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable

Soient  $E$  un ev euclidien et  $u$  une isométrie vectorielle.

Soit  $F$  un sev de  $E$  stable par  $u$ .

Alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .

### Démonstration

Soit  $x \in F^\perp$ .

$$\begin{aligned} \forall y \in F \quad (u(x) | u(y)) &= (x | y) \text{ car } u \text{ est une isométrie vectorielle} \\ &= 0 \text{ car } x \in F^\perp \text{ et } y \in F \end{aligned}$$

Donc  $u(x) \perp u(F)$ .

Mais  $F$  est stable par  $u$  donc  $u(F) \subset F$ .

De plus  $u$  est un automorphisme donc  $\dim(u(F)) = \dim(F)$ .

D'où  $u(F) = F$ .

Donc  $u(x) \perp F$  ie  $u(x) \in F^\perp$ .

$F^\perp$  est bien stable par  $u$ .

## 8 Matrices orthogonales

### 8.1 Définition

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite orthogonale si, et seulement si,  $A^T A = I_n$ .

### 8.2 Interprétation en termes de colonnes

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Le coefficient à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne de  $M^T M$  est :

$$\sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j}$$

ie le produit scalaire de la  $i$ -ème et de la  $j$ -ème colonne de  $M$ .

Par conséquent, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$A$  est orthogonale  $\iff$  ses colonnes forment une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^n$

et comme le nombre de colonnes de  $A$  est égal à la dimension de  $\mathbb{R}^n$  :

$A$  est orthogonale  $\iff$  ses colonnes forment une BON de  $\mathbb{R}^n$

### 8.3 Matrices orthogonales : interprétation en termes de lignes

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Il y a équivalence entre :

(i)  $A$  est orthogonale

(ii)  $AA^T = I_n$

(iii) Les lignes de  $A$  forment une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^n$

(iv) Les lignes de  $A$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$

#### Démonstration

(i)  $\implies$  (ii) On suppose  $A$  orthogonale.

Par définition  $A^T A = I_n$  donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = A^T$ .

Donc  $AA^T = AA^{-1} = I_n$ .

(ii)  $\implies$  (iii) Le produit scalaire de la  $i$ -ème et de la  $j$ -ème ligne de  $A$  est :

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (A^T)_{k,j} = (AA^T)_{i,j} = \delta_{i,j}$$

Donc les lignes de  $A$  forment une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

(iii)  $\implies$  (iv) Le nombre de lignes de  $A$  est égal à la dimension de  $\mathbb{R}^n$  donc si les lignes de  $A$  forment une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  alors elles forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

(iv)  $\implies$  (i)  $(AA^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k} = (L_i(A) | L_j(A)) = \delta_{i,j}$

Donc  $AA^T = I_n$ .

Donc  $A$  est inversible et  $A^T = A^{-1}$ .

On en déduit  $A^T A = A^{-1} A = I_n$  et  $A$  est une matrice orthogonale.

#### Remarque

En général, une matrice ne commute pas avec sa transposée.

### 8.4 Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$A$  est une matrice orthogonale  $\iff$  il existe deux BON  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^n$  telles que  $A$  soit la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$ .

#### Démonstration

On suppose que  $A$  est orthogonale.

Les colonnes de  $A$  forment une BON de  $\mathbb{R}^n$ .

$A$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , qui est orthonormée, vers la base formée par les colonnes de  $A$ , qui est elle aussi orthonormée.

Réciproquement, on suppose qu'il existe  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{C} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  deux BON de  $\mathbb{R}^n$  telles que  $A$  soit la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \epsilon_j &= \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \\ (A^T A)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k \mid \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k \right) \text{ expression du produit scalaire en BON} \\ &= (\epsilon_i \mid \epsilon_j) = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Donc  $A^T A = I_n$  et  $A$  est une matrice orthogonale.

### 8.5 Changement de base orthonormale

Soit  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases orthonormales de  $E$ .

Soit  $P_{1,2}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$ .

D'après ce qui précède,  $P_{1,2}$  est une matrice orthogonale.

Soit  $x \in E$ .

Soit  $X_1$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}_1$ .

Soit  $X_2$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

On a :

$$X_1 = P_{1,2} X_2 \text{ et } X_2 = P_{2,1} X_1 = P_{1,2}^{-1} X_1 \text{ d'où } X_2 = P_{1,2}^T X_1.$$

Soient  $v \in \mathcal{L}(E)$  et  $A_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_i} v$  ( $i = 1, 2$ ).

On a :

$$A_2 = P_{2,1} A_1 P_{1,2} = P_{1,2}^{-1} A_1 P_{1,2}$$

D'où  $A_2 = P_{1,2}^T A_1 P_{1,2}$  et de même  $A_1 = P_{1,2} A_2 P_{1,2}^T$ .

Par rapport à un changement de base ordinaire on économise l'inversion de la matrice de passage  $P_{1,2}$ .

### 8.6 Caractérisation des automorphismes orthogonaux à l'aide de leurs matrices dans les BON

Soient  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

$$\begin{aligned} u \in O(E) &\iff \text{il existe } \mathcal{B} \text{ BON de } E \text{ tq } \text{Mat}_{\mathcal{B}} u \text{ est une matrice orthogonale} \\ &\iff \text{pour toute BON } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ } \text{Mat}_{\mathcal{B}} u \text{ est une matrice orthogonale} \end{aligned}$$

#### Démonstration

- (1)  $\implies$  (3)

On suppose que  $u \in O(E)$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une BON de  $E$ .

Soit  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i$$

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad (M^T M)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n (M^T)_{i,k} M_{k,j} = \sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j} \\ &= (u(e_i) \mid u(e_j)) \text{ expression du produit scalaire en BON} \\ &= (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Donc  $M^T M = I_n$  et  $M \in O(n)$ .

- (3)  $\implies$  (2) : trivial
- (2)  $\implies$  (1)

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une BON de  $E$  telle que  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O(n)$ .

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad (u(e_i)|u(e_j)) &= \left( M^T M \right)_{i,j} \text{ cf le calcul précédent} \\ &= \delta_{i,j} \text{ car } M^T M = I_n \end{aligned}$$

$(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une famille ON de  $n$  vecteurs en dimension  $n$  donc  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une BON de  $E$ .

D'après ?,  $u \in O(E)$ .

**Remarque**

La base canonique étant une base orthonormée, on a pour  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  
 $A$  est orthogonale  $\iff$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  est un automorphisme orthogonal

**8.7 Groupe orthogonal**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On appelle groupe orthogonal d'ordre  $n$  et on note  $O_n(\mathbb{R})$  ou  $O(n)$  l'ensemble des matrices orthogonales à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

Les propriétés essentielles du groupe orthogonal sont :

- $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$
- $O(n) \neq \emptyset$  car  $I_n \in O(n)$
- **Stabilité par produit matriciel :**  
 Soit  $(A, B) \in O(n)^2$ .

$$\begin{aligned} (AB)^T(AB) &= (B^T A^T)(AB) = B^T(A^T A)B \\ &= B^T I_n B = B^T B \text{ car } A \in O(n) \\ &= I_n \text{ car } B \in O(n) \end{aligned}$$

Donc  $AB \in O(n)$  et  $O(n)$  est stable par produit matriciel.

- **Stabilité par passage à l'inverse**

Soit  $A \in O(n)$ .

On a déjà vu que l'inverse de  $A$  est  $A^T$ .

$$\begin{aligned} (A^{-1})^T A^{-1} &= (A^T)^T A^T = AA^T \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc  $A^{-1} \in O(n)$  et  $O(n)$  est stable par passage à l'inverse.

**8.8 Déterminant d'une matrice orthogonale**

$$\forall M \in O(n) \quad |\det M| = 1$$

En effet on a  $M^T M = I_n$  d'où en prenant le déterminant  $(\det M)^2 = 1$ .

**Remarque**

Il existe des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 ( $I_n$  par exemple) et des matrices orthogonales de déterminant égal à  $-1$  ( $\text{Diag}(1, \dots, 1, -1)$  par exemple).

**Exemple : déterminant d'une symétrie orthogonale**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ .

Soit  $F$  un sev de  $E$  et  $s$  la symétrie orthogonale par rapport à  $F$ .

Si  $F = E$  alors  $s = id_E$  et  $\det s = 1$ .

Si  $F = \{0\}$  alors  $s = -id_E$  et  $\det s = (-1)^{\dim E}$ .

On suppose donc  $p = \dim F \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ .

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une BON de  $F$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une BON de  $F^\perp$ .

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une BON de  $E$ .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \det s &= \begin{vmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{vmatrix} = \det(I_p) \times \det(-I_{n-p}) = (-1)^{n-p} \\ &= (-1)^{\dim E - \dim F} \end{aligned}$$

**Remarque**

Soient  $n \geq 2$  et  $M = \text{Diag}(2, 1/2, 1, \dots, 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$\det M = 1$  mais  $M$  n'est pas une matrice orthogonale.

**8.9 Groupe spécial orthogonal**

On note  $\text{SO}(n)$  ou  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales à  $n$  lignes et  $n$  colonnes de déterminant égal à 1.

Les propriétés essentielles du groupe spécial orthogonal sont :

- $\text{SO}(n) \subset \text{O}(n)$
- $\text{SO}(n) \neq \emptyset$
- $\text{SO}(n)$  est stable par le produit matriciel :  
Soit  $(M, N) \in \text{SO}(n)^2$   
 $\det(MN) = \det(M) \det(N) = 1 \times 1 = 1$  donc  $MN \in \text{SO}(n)$
- $\text{SO}(n)$  est stable par passage à l'inverse :  
Soit  $M \in \text{SO}(n)$ .  
 $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = \frac{1}{1} = 1$  donc  $M^{-1} \in \text{SO}(n)$ .

**8.10 Déterminant d'un automorphisme orthogonal**

Ce paragraphe n'est pas mentionné dans le programme.

Soit  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\forall u \in \text{O}(E) \quad |\det u| = 1$$

**Démonstration**

Soit  $\mathcal{B}$  une BON de  $E$  et  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}u$ .

D'après ?,  $M \in \text{O}(n)$ .

D'après ?,  $|\det M| = 1$

Mais  $\det u = \det M$  donc  $|\det u| = 1$

**Remarque**

Soient  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{B}$  une BON de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tq  $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(2, 1/2, 1, \dots, 1)$ .

$\det u = 1$  mais  $u$  n'est pas une isométrie vectorielle de  $E$ .

**8.11 Orientation d'un espace euclidien**

**8.11.1 Remarque préliminaire**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ .

Si  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont deux bases orthonormées de  $E$ ,  $\det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$  qui est égal au déterminant de la matrice de passage de  $\mathcal{B}_2$  à  $\mathcal{B}_1$  vaut 1 ou -1.

**8.11.2 Orientation d'un espace euclidien**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ .

Concrètement, orienter l'espace  $E$  c'est choisir une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ . On appelle alors bases orthonormées directes les bases orthonormées  $\mathcal{C}$  de  $E$  telles que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 1$  et bases orthonormées indirectes de  $E$  les bases  $\mathcal{C}$  de  $E$  telles que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = -1$ .

En pratique, une fois orienté  $E$ , on se restreint à ne travailler qu'avec des bases orthonormées directes.

**9 Isométries vectorielles d'un plan euclidien**

**9.1 Détermination des matrices orthogonales à deux lignes et deux colonnes**

Les matrices de  $O(2)$  sont :

**i** les matrices de la forme  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  (ou  $[0; 2\pi[$  ou  $]-\pi; \pi]$ ).

( $\theta = 0$  donne  $I_2$ ,  $\theta = \pi$  donne  $-I_2$ )

**ii** les matrices de la forme  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  (ou  $[0; 2\pi[$  ou  $]-\pi; \pi]$ ).

Les matrices de  $SO(2)$  sont les matrices de la forme  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  (ou  $[0; 2\pi[$  ou  $]-\pi; \pi]$ ).

**Démonstration**

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$ .

Les colonnes de  $M$  sont unitaires donc :  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ .

Donc :

$\exists(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$  (ou  $[0; 2\pi]^2$  ou  $[-\pi; \pi]^2$  avec en plus unicité) tq  $\begin{cases} a = \cos(\theta_1) & c = \cos(\theta_2) \\ b = \sin(\theta_1) & d = \sin(\theta_2) \end{cases}$

Mais les colonnes de  $M$  sont orthogonales donc  $ac + bd = 0$ .

Donc :  $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) = 0$

Donc :  $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$

Donc :  $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$  ou  $\theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- **Premier cas :**  $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}(2\pi)$

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$$

- **Deuxième cas :**  $\theta_2 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}(2\pi)$

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \end{pmatrix}$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R} \quad & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ & = I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R} \quad & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ & = I_2 \end{aligned}$$

Déjà :

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour déterminer  $SO(2)$ , on calcule le déterminant de ces matrices :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{vmatrix} = -\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = -1$$

Donc :

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

## 9.2 Commutativité de $SO(2)$

Le produit matriciel est commutatif dans  $SO(2)$  :

$$\forall (A, B) \in SO(2)^2 \quad AB = BA$$

Plus précisément, si on note  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  on a :

$$\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned}
 \forall(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad R_\theta R_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix} \\
 &= R_{\theta+\varphi}
 \end{aligned}$$

On en déduit alors par récurrence :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

De plus  $R_\theta$  étant une matrice orthogonale, son inverse est égale à sa transposée.

Mais  $R_\theta^T = R_{-\theta}$  donc  $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

On en déduit alors pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$R_\theta^{-n} = (R_\theta^{-1})^n = (R_{-\theta})^n = R_{-n\theta} \text{ et finalement :}$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

Soit alors  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

On suppose  $(a, b) \neq (0, 0)$  (sinon  $A$  est la matrice nulle dont il n'y a pas grand chose à dire).

On a rencontré dans le cours sur les suites récurrentes le calcul des puissances de cette matrice.

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} a = r \cos(\theta) \\ b = r \sin(\theta) \end{cases} \text{ avec } r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$$

$A = rR_\theta$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad A^n = r^n R_{n\theta}$$

### 9.3 Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté

#### 9.3.1 Définition

Soit  $E$  un plan euclidien orienté.

On appelle rotation vectorielle de  $E$  toute isométrie vectorielle de  $E$  dont le déterminant est égal à 1.

#### 9.3.2 Angle d'une rotation vectorielle

Soit  $E$  un plan vectoriel orienté.

Soit  $\rho$  une rotation vectorielle de  $E$ .

Il existe un réel  $\theta$  tel que la matrice de  $\rho$  dans toute base orthonormée directe de  $E$  est

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

$\theta$  s'appelle l'angle de la rotation vectorielle  $\rho$ .

Il est unique à  $2\pi$  près.

**Démonstration**

Soit  $\mathcal{B}$  une BOND de  $E$ .

Soit  $M$  la matrice de  $\rho$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

$\mathcal{B}$  étant orthonormée,  $M$  est une matrice orthogonale.

$\rho$  étant de déterminant 1,  $M$  l'est aussi et  $M \in SO(2)$ .

Donc, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $M = R_\theta$ .

Soit alors  $\mathcal{C}$  une autre BOND de  $E$ .

Soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont orthonormées donc  $P$  est une matrice orthogonale.

$\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont directes donc  $\det(P) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 1$  et  $P$  appartient aussi à  $SO(2)$ .

Donc il existe  $\phi \in \mathbb{R}$  tel que  $P = R_\phi$ .

Soit  $N$  la matrice de  $\rho$  dans  $\mathcal{C}$ .

$N = P^{-1}MP = P^{-1}PM$  car le produit matriciel est commutatif dans  $SO(2)$ .

D'où  $N = P$ .

**9.3.3 Mesure d'un angle orienté de vecteurs unitaires d'un plan euclidien orienté**

Soit  $E$  un plan euclidien orienté.

Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs unitaires de  $E$ .

Il existe une et une seule rotation vectorielle de  $E$  qui envoie  $u$  sur  $v$ .

On appelle mesure de l'angle orienté  $(u, v)$  l'angle de cette rotation.

**Démonstration**

• **Unicité**

Supposons qu'il existe deux rotations vectorielles  $\rho_1$  et  $\rho_2$  telles que  $\rho_1(u) = \rho_2(u) = v$ .  
 $\rho = \rho_2^{-1} \circ \rho_1$  est une rotation vectorielle ( $SO(2)$  est stable par produit matriciel et passage à l'inverse).

De plus  $\rho(u) = u$  donc 1 est valeur propre de  $\rho$ .

Mais le polynôme caractéristique de la matrice  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  est  $X^2 -$

$2 \cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$  donc  $1 = e^{i\theta}$  ou  $1 = e^{-i\theta}$ .

De toute façon,  $\theta = 0$  et  $\rho = id_E$ .

Donc  $\rho_1 = \rho_2$  et il y a unicité.

• **Existence**

Soit  $\mathcal{B}$  une BOND de  $E$ .

Soit  $w$  un vecteur unitaire orthogonal à  $u$ .

$\det_{\mathcal{B}}((u, -w)) = -\det_{\mathcal{B}}((u, w))$  donc, quitte à changer  $w$  en  $-w$ , on peut supposer que  $(u, w)$  est directe.

Soit  $(x, y)$  les coordonnées de  $v$  dans la base  $(u, w)$ .

$\|v\| = 1$  donc  $x^2 + y^2 = 1$  et il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases}$ .

Soit  $\rho$  la rotation vectorielle dont la matrice dans la base  $(u, w)$  est  $R_\theta$ .

$\rho(u) = v$

**9.3.4 Mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls d'un plan euclidien orienté**

Soit  $E$  un plan euclidien orienté.

Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs non nuls de  $E$ .

On appelle mesure de l'angle orienté  $(u, v)$ , la mesure de l'angle orienté  $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right)$ .

### 9.4 Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien

Soient  $E$  un plan vectoriel euclidien et  $u$  une isométrie vectorielle.

$\det(u) = \pm 1$

- **Premier cas :**  $\det(u) = 1$

$u$  est une rotation.

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  soit  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

Soit  $\mathcal{C}$  une autre base orthonormée de  $E$ .

Si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 1$  alors la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{C}$  est  $R_\theta$ .

Si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = -1$  alors il existe  $\phi \in \mathbb{R}$  tel que la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$  soit

$$S_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

D'où  $Mat_{\mathcal{C}}(u) = S_\phi^T R_\theta S_\phi = S_\phi R_\theta S_\phi = R_{-\theta}$ .

En effet :

$$\begin{aligned} \forall(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \quad R_\theta S_\phi &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) - \cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & \sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} \\ &= S_{\theta + \phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \quad S_\phi R_\theta S_\phi &= S_\phi S_{\theta + \phi} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & \sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta + \phi) - \sin(\phi)\sin(\theta + \phi) & \cos(\phi)\sin(\theta + \phi) - \sin(\phi)\cos(\theta + \phi) \\ \sin(\phi)\cos(\theta + \phi) - \cos(\phi)\sin(\theta + \phi) & \cos(\phi)\cos(\theta + \phi) - \sin(\phi)\sin(\theta + \phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi - (\theta + \phi)) & \sin(\theta + \phi - \phi) \\ \sin(\phi - (\theta + \phi)) & \cos(\phi - (\theta + \phi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= R_{-\theta} \end{aligned}$$

L'angle de la rotation  $u$  n'est défini qu'une fois le plan euclidien orienté. Il est changé en son opposé lorsqu'on change l'orientation.

- **Deuxième cas :**  $\det(u) = -1$

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

Il existe  $\phi \in \mathbb{R}$  tel que la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  soit  $S_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}$ .

$S_\phi^2 = I_2$  (cf le calcul ci-dessus avec  $\theta = 0$ )

Donc  $u^2 = id_E$  et  $u$  est une symétrie orthogonale.

$0 = \text{tr}(u) = \dim(E_1(u)) - (2 - \dim(E_1(u))) = 2 \dim(E_1(u)) - 2$  donc  $\dim(E_1(u)) = 1$

$u$  est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, donc une réflexion en dimension 2.

## 10 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

### 10.1 Définition des endomorphismes autoadjoints

Soit  $E$  un ev euclidien.

On appelle endomorphisme autoadjoint de  $E$  tout endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = (x|u(y))}$$

Je cite le programme :

On mentionne la terminologie "endomorphisme symétrique", tout en lui préférant celle d'"endomorphisme autoadjoint"

### 10.2 Exemples d'endomorphismes autoadjoints

- **Homothéties**

Toute homothétie d'un ev euclidien est autoadjointe.

En effet si  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (\lambda x|y) = (x|\lambda y)$$

- **Projections orthogonales**

Soient  $E$  un ev euclidien et  $p \in \mathcal{L}(E)$ .

$$p \text{ est un projecteur orthogonal de } E \iff \begin{cases} p^2 = p \\ p \text{ est autoadjoint} \end{cases}$$

En d'autres termes les projecteurs orthogonaux de  $E$  sont les projecteurs autoadjoints.

Ce résultat figure explicitement au programme.

Notons au passage que, contrairement à ce que leur nom pourrait laisser croire, **les projecteurs orthogonaux ne sont pas des automorphismes orthogonaux.**

#### Démonstration

—  $\implies$

Soit  $p$  un projecteur orthogonal de  $E$ .

$p$  est un projecteur donc  $p^2 = p$ .

$p$  est un projecteur orthogonal donc  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ .

Soit  $(x, y) \in E^2$ .

$\exists!(x_I, x_K) \in \text{Im}(p) \times \text{Ker}(p)$  tq  $x = x_I + x_K$

$\exists!(y_I, y_K) \in \text{Im}(p) \times \text{Ker}(p)$  tq  $y = y_I + y_K$

$(p(x)|y) = (x_I|y_I + y_K) = (x_I|y_I) + (x_I|y_K)$

$x_I \in \text{Im}(p)$  et  $y_K \in \text{Ker}(p) = (\text{Im}(p))^\perp$  donc  $(x_I|y_K) = 0$  et  $(p(x)|y) = (x_I|y_I)$

$(x|p(y)) = (x_I + x_K|y_I) = (x_K|y_I) + (x_I|y_I)$

$y_I \in \text{Im}(p)$  et  $x_K \in \text{Ker}(p) = (\text{Im}(p))^\perp$  donc  $(x_K|y_I) = 0$  et  $(x|p(y)) = (x_I|y_I)$

$p$  est bien autoadjoint.

—  $\impliedby$

$p^2 = p$  donc  $p$  est un projecteur.

Soient  $x_K \in \text{Ker}(p)$  et  $x_I \in \text{Im}(p)$ .

$x_I \in \text{Im}(p)$  donc :

$\exists x \in E$  tq  $x_I = p(x)$   
 $(x_K | x_I) = (x_K | p(x)) = (p(x_K) | x)$  car  $p$  est autoadjoint.  
 Mais  $p(x_K) = 0$  donc  $(x_K | x_I) = 0$ .  
 Donc  $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$ .  
 Donc  $p$  est un projecteur orthogonal de  $E$ .

**Remarque**

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .  
 Le même raisonnement que ci-dessus montre que  $\text{Ker}(u) \perp \text{Im}(u)$ .

On a alors :

$\dim(\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim E$  par la formule du rang.

Donc  $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ .

Ce résultat ne figure pas au programme.

• **Symétries orthogonales**

Soient  $E$  un ev euclidien et  $s \in \mathcal{L}(E)$ .

$s$  est une symétrie orthogonale de  $E \iff \begin{cases} s^2 = Id_E \\ s \text{ est autoadjointe} \end{cases}$

En d'autres termes les symétries orthogonales de  $E$  sont les symétries autoadjointes.

**Démonstration**

—  $\implies$

Soit  $s$  une symétrie orthogonale de  $E$ .

$s$  est une symétrie donc  $s^2 = id_E$ .

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (s(x) | y) = (s(s(x)) | s(y)) \quad s \text{ est une symétrie orthogonale donc } s \in O(E)$$

$$= (x | s(y))$$

$s$  est bien autoadjointe.

—  $\impliedby$

$s^2 = id_E$  donc  $s$  est une symétrie.

Soit  $x \in \text{Ker}(s - id_E)$  et  $y \in \text{Ker}(s + id_E)$ .

$$(x | y) = (s(x) | y) = (x | s(y)) \text{ car } s \text{ est autoadjointe}$$

$$= (x | -y) = -(x | y)$$

Donc  $(x | y) = 0$ .

Donc  $\text{Ker}(s - id_E) \perp \text{Ker}(s + id_E)$ .

$s$  est bien une symétrie orthogonale.

**10.3 Caractérisation des endomorphismes autoadjoints à l'aide de leurs matrices dans les BON**

Soient  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Il y a équivalence entre :

- i  $u$  est autoadjoint
- ii il existe  $\mathcal{B}$  BON de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est symétrique
- iii pour toute BON  $\mathcal{B}$  de  $E$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est symétrique

Si on fixe une BON de  $E$ , on prouve alors que l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de  $E$  est un sev de  $\mathcal{L}(E)$  isomorphe au sev de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices symétriques donc de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Cet espace est noté  $\mathcal{S}(E)$  dans le programme.

### Démonstration

- $(i) \implies (iii)$

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une BON de  $E$  et  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad m_{i,j} &= (e_i | u(e_j)) \\ &= (u(e_i) | e_j) \text{ car } u \text{ est autoadjoint} \\ &= (e_j | u(e_i)) \text{ symétrie du produit scalaire} \\ &= m_{j,i} \end{aligned}$$

Donc  $M \in S_n(\mathbb{R})$ .

- $(iii) \implies (ii)$

Trivial

- $(ii) \implies (i)$

Soit  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

Soit  $x \in E$  et  $X$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ .

Soit  $y \in E$  et  $Y$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ .

$MX$  est alors la matrice colonne des coordonnées de  $u(x)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

$MY$  est alors la matrice colonne des coordonnées de  $u(y)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'expression du produit scalaire en BON donne alors :

$$(u(x) | y) = (MX)^T Y = X^T M^T Y = X^T M Y = X^T (MY) = (x | u(y))$$

$u$  est bien autoadjoint.

## 10.4 Théorème spectral : le cas des endomorphismes autoadjoints

Soient  $E$  un ev euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

Alors  $E$  est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de  $u$ .

En particulier  $u$  est diagonalisable dans une BON ie il existe une BON de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

### Remarques

- Réciproquement si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable dans une BON alors  $u$  est autoadjoint (une matrice diagonale est symétrique).
- La démonstration du théorème spectral n'est pas exigible.
- **Question de cours Centrale 99**  
On admet qu'un endomorphisme symétrique réel possède au moins une valeur propre. Démontrer qu'il est diagonalisable en BON.

### Correction

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

On a  $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$ .

$$\text{Mq } \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E.$$

On commence par montrer que  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$  est de plus, une somme directe orthogonale ie les sous-espaces propres de  $u$  sont deux à deux orthogonaux.

Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 \in \text{Sp}(u)$  avec  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Soient  $x_1 \in E_{\lambda_1}(u)$  et  $x_2 \in E_{\lambda_2}(u)$ .

$$\begin{aligned} (u(x_1)|x_2) &= (\lambda_1 x_1|x_2) = \lambda_1(x_1|x_2) \\ &= (x_1|u(x_2)) = (x_1|\lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1|x_2) \end{aligned}$$

Donc  $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1|x_2) = 0$  avec  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$  donc  $(x_1|x_2) = 0$ .

$$\text{On note ensuite } F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

On suppose  $F^\perp \neq \{0\}$ .

$F$  est stable par  $u$  comme somme de sev stables par  $u$ .

Soit  $x \in F^\perp$ .

$\forall y \in F (u(x)|y) = (x|u(y))$  avec  $u(y) \in F$  car  $F$  est stable par  $u$ .

Comme  $x \in F^\perp$ ,  $(u(x)|y) = 0$ .

Donc  $u(x) \in F^\perp$  et  $F^\perp$  est stable par  $u$ .

$$\text{Soit } v \begin{cases} F^\perp \rightarrow F^\perp \\ x \mapsto u(x) \end{cases}.$$

$$\forall (x, y) \in (F^\perp)^2 (v(x)|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|v(y))$$

$v$  est autoadjoint.

Mais  $F^\perp \neq \{0\}$  donc  $v$  a au moins une valeur propre  $\mu$  et un vecteur propre associé  $x_\mu$ .

On a  $x_\mu \neq 0$  et :

$$u(x_\mu) = v(x_\mu) = \mu x_\mu$$

Donc  $\mu \in \text{Sp}(u)$  et  $x_\mu \in E_\mu(u) \subset F$ .

Donc  $x_\mu \neq 0$  et  $x_\mu \in F \cap F^\perp$ .

C'est absurde donc  $F^\perp = \{0\}$  et  $F = (F^\perp)^\perp = (\{0\})^\perp = E$  ie :  $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$

En prenant une BON de chaque sous-espace propre de  $u$  et en les réunissant, on obtient une BON de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

## 10.5 Théorème spectral : le cas des matrices symétriques réelles

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique.

Alors il existe  $P$  matrice orthogonale et  $D$  diagonale réelle telle que :

$$A = PDP^T = PDP^{-1}$$

### Démonstration

On se place dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique.

$A$  étant symétrique,  $u_A$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ , est autoadjoint.

Donc il existe  $\mathcal{B}$  base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $u_A$ .

Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathcal{B}$ .

La formule de changement de BON donne :

$$A = P \times (\text{Mat}_{\mathcal{B}} u_A \text{ qui est diagonale}) \times P^T.$$

**Remarques**

- La réciproque est vraie.  
Si  $A = PDP^T$  avec  $P \in O(n)$  et  $D$  diagonale réelle on a :  
 $A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$

- **CCP 2019**

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A = 0$ .  
Montrer que  $A = 0$ .

**Correction**

$A$  est diagonalisable car symétrique réelle.

Les valeurs propres de  $A$  sont réelles et racines de  $X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 = \frac{X(X^5 - 1)}{X - 1}$   
donc  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .

$A$  est donc semblable à la diagonale nulle et  $A = 0$ .

- **Question posée pendant un exercice de Centrale :**

Est-ce que toute matrice symétrique est diagonalisable ?

**Correction**

On va voir à l'aide d'un contreexemple qu'une matrice symétrique complexe n'est pas forcément diagonalisable.

On cherche  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  non diagonalisable.

On cherche  $(a, b, c)$  pour  $\text{tr}(A) = a + c = 0$  et  $\det A = ac - b^2 = 0$  avec  $A \neq 0$  (cf cours sur la réduction des endomorphismes).

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ ac - b^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a \\ b^2 = -a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a \\ b = \pm ia \end{cases}$$

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ .

$A \in S_2(\mathbb{C})$  et  $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2$

$\text{Sp}(A) = \{0\}$  et  $A \neq 0$  donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

En taille  $n$  soit  $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\chi_B = \begin{vmatrix} XI_2 - A & 0 \\ 0 & XI_{n-2} \end{vmatrix} = \chi_A X^{n-2} = X^n$$

$\text{Sp}(B) = \{0\}$  et  $B \neq 0$  donc  $B$  n'est pas diagonalisable.

- **Mines 2019**

1. Montrer que  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable.
2. Trouver toutes les matrices symétriques de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  qui ne sont pas diagonalisables.

**Correction**

1.  $\chi_M = X^2 - \text{tr}(M)X + \det(M) = X^2$   
0 est valeur propre double et  $\dim(E_0(M)) < 2$  (car  $M \neq 0$ ) donc  $M$  n'est pas

diagonalisable.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{C})$ .

$\chi_A$  a deux racines simples ou une racine double.

Si  $\chi_A$  a deux racines simples alors  $A$  est diagonalisable.

Si  $\chi_A$  a une racine double  $\lambda$  alors  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A = \lambda I_2$ .

Il s'agit donc d'écrire que  $A$  a une valeur propre double sans être diagonale.

$$\chi_A = X^2 - (a+c)X + ac - b^2$$

$$\Delta = (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 = (a-c+2ib)(a-c-2ib)$$

La CNS cherchée est  $\Delta = 0$  et  $b \neq 0$ .

## 11 Endomorphismes autoadjoints positifs

### 11.1 Définition des endomorphismes autoadjoints positifs

Soit  $E$  un espace euclidien.

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

On dit que  $u$  est positif si, et seulement si, pour tout  $x \in E$ ,  $(u(x)|x) \geq 0$

On note  $\mathcal{S}^+(E)$  l'ensemble des automorphismes autoadjoints positifs de  $E$ .

#### 11.1.1 Caractérisation spectrale des endomorphismes autoadjoints positifs

Soit  $E$  un espace euclidien.

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$$

#### Démonstration

$\implies$  Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$

$$\exists x \in E \setminus \{0\} \text{ tq } u(x) = \lambda x$$

$$(u(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2 \text{ donc :}$$

$$\lambda = \frac{(u(x)|x) \geq 0}{\|x\|^2 > 0} \geq 0$$

Donc  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ .

$\impliedby$  D'après le théorème spectral, il existe  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , soit  $\lambda_i$  la valeur propre de  $u$  associée au vecteur propre  $e_i$ . Par hypothèse, c'est un réel positif.

Soit  $x$  un vecteur de  $E$ .

$$\begin{aligned} \exists(x_1, \dots, x_n) \text{ tq } x &= \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ (u(x)|x) &= \left( u \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \mid \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \mid \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \text{ expression du produit scalaire en BON} \\ &\geq 0 \text{ comme somme de nombres positifs} \end{aligned}$$

## 11.2 Définition des endomorphismes autoadjoints définis positifs

Soit  $E$  un espace euclidien.

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

On dit que  $u$  est défini positif si, et seulement si, pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ ,  $(u(x)|x) > 0$

On note  $\mathcal{S}^{++}(E)$  l'ensemble des automorphismes autoadjoints positifs de  $E$ .

### 11.2.1 Caractérisation spectrale des endomorphismes autoadjoints définis positifs

Soit  $E$  un espace euclidien.

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

#### Démonstration

$\implies$  Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$

$\exists x \in E \setminus \{0\}$  tq  $u(x) = \lambda x$

$(u(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2$  donc :

$$\lambda = \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} > 0$$

Donc  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

$\impliedby$  D'après le théorème spectral, il existe  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , soit  $\lambda_i$  la valeur propre de  $u$  associée au vecteur propre  $e_i$ . Par hypothèse, c'est un réel strictement positif.

Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ .

$$\exists(x_1, \dots, x_n) \text{ tq } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$x$  est non nul donc il existe  $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $x_{i_0} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 (u(x)|x) &= \left( u \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \mid \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \mid \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \text{ expression du produit scalaire en BON} \\
 &= \left( \lambda_{i_0} x_{i_0}^2 > 0 \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \left( \lambda_i x_i^2 \geq 0 \right) \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

## 12 Matrices symétriques positives

### 12.1 Définition des matrices symétriques positives

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  (ie  $A$  symétrique réelle).

On dit que  $A$  est positive si, et seulement si, pour tout colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $X^T A X \geq 0$

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques réelles positives à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

### 12.2 Caractérisation spectrale des matrices symétriques positives

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$$

#### Démonstration

- $\implies$  Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  ( $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  donc  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ )

$$\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tq } AX = \lambda X$$

$$X^T A X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$$

$$\text{Donc } \lambda = \frac{X^T A X \geq 0}{\|X\|^2 > 0} \geq 0.$$

- $\impliedby$

$A$  est symétrique réelle donc :

$$\exists P \in O(n) \text{ tq } A = P D P^T \text{ avec } D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ et } : \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \lambda_i \geq 0$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned}
 X^T A X &= X^T (P D P^T) X = (X^T P) D (P^T X) \\
 &= (P^T X)^T D (P^T X)
 \end{aligned}$$

On pose  $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} X^T A X &= Y^T D Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i \geq 0) y_i^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

### 12.3 Définition des matrices symétriques définies positives

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  (ie  $A$  symétrique réelle).

On dit que  $A$  est définie positive si, et seulement si, pour tout colonne non nulle  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  $X^T A X > 0$

On note  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

### 12.4 Caractérisation spectrale des matrices symétriques définies positives

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$$

#### Démonstration

- $\implies$  Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  ( $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  donc  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ )

$$\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tq } AX = \lambda X$$

$$X^T A X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$$

$$\text{Donc } \lambda = \frac{X^T A X > 0}{\|X\|^2 > 0} > 0.$$

- $\impliedby$

$A$  est symétrique réelle donc :

$$\exists P \in O(n) \text{ tq } A = P D P^T \text{ avec } D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ et } : \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \lambda_i > 0$$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} X^T A X &= X^T (P D P^T) X = (X^T P) D (P^T X) \\ &= (P^T X)^T D (P^T X) \end{aligned}$$

On pose  $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

$X$  est non nul et  $P$  est inversible donc  $Y$  est non nul et il existe  $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $y_{i_0} > 0$ .

$$\begin{aligned} X^T A X &= Y^T D Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \\ &= (\lambda_{i_0} y_{i_0}^2 > 0) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n (\lambda_i y_i^2 \geq 0) \\ &> 0 \end{aligned}$$

### 13 Plus grande et plus petite valeur propre d'une matrice symétrique réelle

Ce qui suit constitue le principe de très nombreux exercices mais n'est pas explicitement au programme.

#### 13.1 La situation générale

Soit  $A$  une matrice symétrique réelle de valeurs propres  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

Soit  $Q \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto X^T A X \end{cases}$ .

Montrer :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf \{ Q(X) \text{ où } \|X\| = 1 \} \\ \lambda_n &= \sup \{ Q(X) \text{ où } \|X\| = 1 \} \end{aligned}$$

#### Démonstration

On se place dans  $\mathbb{R}^n$  euclidien canonique.

$A$  symétrique  $\implies u_A$  autoadjoint.

Donc il existe  $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  BON de  $\mathbb{R}^n$  tq  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_A) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  tq  $\|X\| = 1$ .

$$Q(X) = X^T A X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

On ne voit pas comment encadrer  $Q(X)$  avec cette formule.

$\exists! (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  tq  $X = \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i$

$\|X\| = 1$  et  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  est une BON de  $\mathbb{R}^n$  donc  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$

$$\begin{aligned} X^T A X &= X^T (A X) = X^T u_A(X) = (X | u_A(X)) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i | u_A \left( \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i \right) \right) = \left( \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i | \sum_{i=1}^n y_i u_A(\epsilon_i) \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i | \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \epsilon_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \text{ car } (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \text{ est une BON de } \mathbb{R}^n \\ &\geq \sum_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda_1 \end{aligned}$$

De plus :

$$Q_A(\epsilon_1) = (\epsilon_1 | u_A(\epsilon_1)) = (\epsilon_1 | \lambda_1 \epsilon_1) = \lambda_1 \|\epsilon_1\|^2 = \lambda_1$$

Donc :

$$\lambda_1 = \min \{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\} = \inf \{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\}$$

En fait, on peut être plus précis :

$$\begin{aligned} Q(X) = \lambda_1 &\iff \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \lambda_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2 \\ &\iff \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_1)(y_i^2) = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket (\lambda_i - \lambda_1)y_i^2 = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tq } \lambda_i \neq \lambda_1 \text{ } y_i = 0 \\ &\iff X \text{ est combinaison linéaire des } \epsilon_i \text{ tq } \lambda_i = \lambda_1 \\ &\iff X \in E_{\lambda_1}(A) \\ &\iff X \text{ est vecteur propre de } A \text{ pour la valeur propre } \lambda_1 \\ &\quad (\|X\| = 1 \text{ donc } X \neq 0) \end{aligned}$$

On va traiter le cas de  $\lambda_n$  en utilisant une autre rédaction, purement matricielle cette fois.

$A$  est symétrique réelle donc :

$$\exists P \in O(n) \text{ tq } A = P D P^T \text{ avec } D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned} X^T A X &= X^T (P D P^T) X = (X^T P) D (P^T X) \\ &= (P^T X)^T D (P^T X) \end{aligned}$$

On pose  $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} X^T A X &= Y^T D Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_n y_i^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{aligned}$$

Supposons  $\|X\| = 1$  ie  $X^T X = 1$ .

$$Y^T Y = (P^T X)^T P^T X = X^T P P^T X = X^T I_n X = 1$$

donc  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$

Donc :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|X\| = 1 \quad X^T A X \leq \lambda_n.$$

Soit  $X = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  la dernière colonne de  $P$ .

$$Y = P^T X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^T A X = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \lambda_n 1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i 0^2 = \lambda_n \text{ et } \|X\| = 1 \text{ car } P \in O(n).$$

Donc  $\lambda_n = \max \{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\} = \sup \{Q(X) \text{ où } \|X\| = 1\}$ .

Examinons en détail le cas d'égalité.

Soit  $X$  unitaire.

$$\begin{aligned}
 X^T A X = \lambda_n &\iff \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \lambda_n = \lambda_n \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_n y_i^2 \\
 &\iff \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_n) y_i^2 = 0 \\
 &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket (\lambda_i - \lambda_n) y_i^2 = 0 \\
 &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tq } \lambda_i \neq \lambda_n \text{ } y_i = 0 \\
 &\iff Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{n-\alpha+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-\alpha} < \lambda_{n-\alpha+1} = \dots = \lambda_n \\
 &\iff X = P Y \text{ est combinaison linéaire des } \alpha \text{ dernières colonnes de } P
 \end{aligned}$$

Or les  $\alpha$  dernières colonnes de  $P$  forment une base de  $E_{\lambda_n}(A)$  donc :

$$\begin{aligned}
 X^T A X = \lambda_n &\iff X \in E_{\lambda_n}(A) \\
 &\iff X \text{ est vecteur propre de } A \text{ pour la valeur propre } \lambda_n \\
 &\quad (\|X\| = 1 \text{ donc } X \neq 0)
 \end{aligned}$$

Considérons alors  $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

$\frac{X}{\|X\|}$  est un vecteur unitaire donc :

$$\lambda_1 \leq \left( \frac{X}{\|X\|} \right)^T A \left( \frac{X}{\|X\|} \right) \leq \lambda_n$$

D'où :

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{\|X\|^2} X^T A X \leq \lambda_n$$

puis :

$$\lambda_1 \|X\|^2 \leq X^T A X \leq \lambda_n \|X\|^2$$

Ces inégalités sont triviales pour  $X = 0$  donc :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad \lambda_1 \|X\|^2 \leq X^T A X \leq \lambda_n \|X\|^2$$

Ces inégalités étant les meilleures possibles.

### 13.1.1 Quelques exemples d'applications

- **X 2015**

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ .

Soient  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ .

Soit  $V$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$ .

Montrer :  $\lambda_n \leq (AV|V) \leq \lambda_1$

Il n'y a rien de plus qu'avant, il s'agit simplement de signaler le caractère très classique de cette question.

• **Mines 2016, 2017**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ .

Soit  $\alpha$  la plus petite valeur propre de  $S$ .

Soit  $\beta$  la plus grande valeur propre de  $S$ .

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $A$ .

Montrer que  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ .

2. ?

3. ?

les questions manquantes portaient sûrement sur la partie réelle des valeurs propres complexes de  $A$ .

**Correction**

1.

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}^n \quad X^T S X &= \frac{1}{2} X^T (A + A^T) X = \frac{1}{2} (X^T A X + X^T A^T X) \\ &= \frac{1}{2} \left( X^T A X + (X^T A^T X)^T \right) \text{ car } X^T A^T X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{2} (X^T A X + X^T A X) = X^T A X \end{aligned}$$

Soit alors  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $A$ .

Soit  $Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

$X = \frac{Y}{\|Y\|}$  est un vecteur unitaire propre pour la valeur propre  $\lambda$ .

$$X^T A X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2 = \lambda.$$

Mais d'après l'étude ci-dessus,  $\alpha \leq X^T S X \leq \beta$  donc  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ .

Passons aux valeurs propres complexes de  $A$ .

Nous allons d'abord examiner l'exercice suivant :

**X 2016**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $\lambda = \gamma + i\delta$  une valeur propre complexe de  $A$  ( $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ ).

Montrer qu'il existe deux vecteurs  $v$  et  $w \in \mathbb{R}^n$  non tous les deux nuls tels que :

$$(Av|v) + (Aw|w) = \gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

**Correction**

Soit  $u \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Soit  $v$  sa partie réelle et  $w$  sa partie imaginaire.

$u$  est non nul donc  $v$  et  $w$  ne sont pas tous les deux nuls.

$$Av + iAw = A(v + iw) = Au = \lambda u = (\gamma + i\delta)(v + iw) = \gamma v - \delta w + i(\gamma w + \delta v)$$

On en déduit :  $Av = \gamma v - \delta w$  et  $Aw = \gamma w + \delta v$ .

D'où :

$$\begin{aligned} (Av|v) + (Aw|w) &= (\gamma v - \delta w|v) + (\gamma w + \delta v|w) \\ &= \gamma \|v\|^2 - \delta(w|v) + \gamma \|w\|^2 + \delta(v|w) \\ &= \gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2) \end{aligned}$$

**Application**

$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \implies \text{Sp}(A) \subset i \mathbb{R}$$

En effet, dans ce cas :

$$(Av|v) = (Av)^T v = v^T A^T v = -v^T Av = -(v|Av) = -(Av|v) \text{ donc } (Av|v) = 0.$$

De même  $(Aw|w) = 0$  et  $\gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2) = 0$  avec  $v$  ou  $w$  non nul.

On en déduit  $\gamma = 0$  ie  $\lambda$  imaginaire pur.

Revenons à l'exercice des Mines.

Comme vu plus haut :

$$\alpha \|v\|^2 \leq v^T S v \leq \beta \|v\|^2 \text{ et } \alpha \|w\|^2 \leq w^T S w \leq \beta \|w\|^2$$

$$\text{Donc } \alpha(\|v\|^2 + \|w\|^2) \leq \gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2) \leq \beta(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

Comme  $v$  et  $w$  ne sont pas tous les deux nuls,  $\|v\|^2 + \|w\|^2 > 0$  et :

$$\alpha \leq \Re e(\lambda) \leq \beta$$