

ALGEBRE LINEAIRE

TD

2024-2025

Chapitre 6

941

1 Produits scalaires : révisions de première année

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$\forall x \in [a, b] \ f(x) > 0$

Montrer que : $\int_{[a,b]} f \cdot \int_{[a,b]} \frac{1}{f} \geq (b-a)^2$

Montrer qu'il y a égalité si et seulement si f est constante.

Exercice 2 (*X 2015*)

Soit E un espace euclidien et F, G deux sev de E tels que $\dim F + \dim G > \dim E$.

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $x \in F \cap G$.

Exercice 3

Soient E un ev euclidien et E_1, E_2 2 sev de E .

Montrer que $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$ et $(E_1 \cap E_2)^\perp = E_1^\perp + E_2^\perp$.

Exercice 4

Soient E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E .

Soit $H = \{x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Donner une BON de H .

Exercice 5 (*Mines 2014*)

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $Y \in \mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe un unique $X \in (\text{Ker } A)^\perp$ et un unique $X' \in (\text{Im } A)^\perp$ tels que $Y = A X + X'$.

2. Soit $G \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow (\text{Ker } A)^\perp \\ Y \mapsto X \end{cases}$.

On admet que G est linéaire.

Déterminer $\text{Ker } G$ et $\text{Im } G$.

Exercice 6 (Centrale 2006)

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soient $u(1, 1, 1, 0)$ et $v(1, 1, 0, 1)$.

Trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u, v)$.

Exercice 7 (Centrale 2018)

Soient $E = \mathbb{R}_4[X]$ et, pour $P, Q \in E$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-2}^2 PQ$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que le sous-espace constitué des polynômes pairs de E et le sous-espace constitué des polynômes impairs de E sont supplémentaires orthogonaux.
3. Déterminer une base orthonormée de E .
4. Soit $f : P \in E \mapsto 2XP' + (X^2 - 4)P''$. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E .

Exercice 8

Soit $F \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) \mapsto \int_0^\pi (a \sin t + b \cos t - t)^2 dt \end{cases}$.

Prouver que F possède un minimum et donner sa valeur.

Exercice 9 (Mines 2015. L'examinatrice n'a pas demandé de mener les calculs jusqu'au bout.)

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_{2n}[X] \times \mathbb{R}_{2n}[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \sum_{k=-n}^n P(k)Q(k) \end{cases}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Trouver une base orthonormée de $\text{Vect}(1, X)$.
3. Donner deux méthodes de calcul de $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - aX - b\|^2$.

Exercice 10 (Centrale)

Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E .

Exercice 11 (*Mines 2021*)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$$

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(U, U^2, \dots, U^{n-1})$ est une base de $F = \text{Vect}(U, U^2, \dots, U^{n-1})$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Donner le projeté orthogonal de A sur F .

Exercice 12 (*Mines 2022*)

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\varphi(M) = \text{tr}(M^T N)$.

Soit $G = \{\alpha I_n, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

1. Trouver l'orthogonal de G pour φ .

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donner une expression de ses projetés orthogonaux sur G et sur $G^\perp$.

3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (le sev de E formé par les matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (le sev de E formé par les matrices antisymétriques) sont supplémentaires.

4. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour φ .

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer $\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$.

(b) Déterminer $\inf_{M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$.

Exercice 13 (*Mines 2021*)

Soient E un espace préhilbertien réel et $a, b \in E \setminus \{0\}$.

Soit $\varphi \begin{cases} E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(x|a) \cdot (x|b)}{\|x\|^2} \end{cases}$.

Déterminer $\inf \varphi$ et $\sup \varphi$.

2 Endomorphismes d'un espace euclidien

2.1 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 14 (*Mines 2021*)

Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots - x_{n-2} + x_{n-1} - x_n$.

Remarques

- Un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension n est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.
- Il semblerait que n soit supposé pair, mais cela a peu d'incidence sur la résolution de l'exercice.

Exercice 15 (*Mines 2019*)

Soit E un espace euclidien et a un vecteur unitaire fixé de E .

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f_\alpha \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x + \alpha(a|x)a \end{cases}$.

1. Montrer que $\{f_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable par produit de composition.
Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, f_α et f_β commutent.
2. Montrer :
 $f_\alpha \in GL(E) \iff \alpha \neq -1$.
Quel est le rang de f_{-1} ?
3. Montrer :
 $f_\alpha \in O(E) \iff \alpha = 0$ ou -2
4. Quels sont les sous-espaces propres de f_α ?

Exercice 16

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté.

1. Montrer que toute rotation de E peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.
2. Est-ce que toute réflexion de E peut s'écrire comme la composée de deux rotations ?

Exercice 17 (*Mines 2016*)

Soit u un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien E .

Soit λ une valeur propre de u .

Montrer que $\dim(E_\lambda(u)) = \text{mult}(\lambda)$.

Exercice 18 (*X 2009, Mines 2015*)

Calculer $\sup_{A \in O(n)} \left(\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} a_{ij} \right)$.

Exercice 19 (*Centrale 2018*)

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On veut montrer :

$$A^T A = B^T B \iff \exists U \in O(n) \text{ tq } B = UA$$

1. (a) On suppose B inversible.

Montrer le résultat.

- (b) **Application**

Résoudre l'équation $X^T X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On suppose que $A^T A = B^T B$ et que B n'est pas inversible.

- (a) Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$.

- (b) La suite de l'exercice ne m'étant pas parvenue, voici une possibilité :
Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. On note r ce nombre.

- (c) Montrer que les valeurs propres de $A^T A = B^T B$ sont positives.
On les note $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

- (d) Montrer qu'il existe $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une BON de $\mathbb{R}^n$ telle que :
 $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket A^T A \epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$

- (e) On pose pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket e_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A \epsilon_i$.

Montrer que $(e_1, \dots, e_r)$ est une BON de $\text{Im}(A)$.

- (f) Montrer qu'il existe $U \in O(n)$ tq $B = UA$.

- (g) Conclure.

Exercice 20 (Mines 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable.

1. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω et une matrice triangulaire supérieure B telles que $A = \Omega B \Omega^T$.
2. On suppose que $AA^T = A^T A$. Montrer que A est diagonalisable.
3. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

2.2 Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 21 (CCP 2022)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^n = 0$.

1. On suppose que $M^T = M$.
Montrer que $M = 0$.
2. On suppose que M commute avec M^T .
Montrer que $M = 0$.
3. ?

Exercice 22 (Mines 2019)

Soit E un espace euclidien.

Un endomorphisme f de E est dit antisymétrique si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (f(x)|y) = -(x|f(y))$$

1. Montrer que $\{f \in \mathcal{L}(E) \text{ antisymétrique}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Que dire de la matrice de f dans une base orthonormée de E ?
3. Déterminer la dimension de $\{f \in \mathcal{L}(E) \text{ antisymétrique}\}$.

Exercice 23 (*Mines 2016*)

Soit E un espace euclidien de dimension finie et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme symétrique.

Montrer que $\mathcal{C} = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } v \circ u = u \circ v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\dim E_\lambda(u))^2.$$

Exercice 24 (*Mines 2019*)

Réduire $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 25 (*Mines 2016*)

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

1. Montrer : $0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq n$
Préciser les cas d'égalité.
2. Montrer : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\text{rg}(A)}$

Exercice 26 (*Mines 2015*)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ et a et b deux vecteurs unitaires linéairement indépendants de E .

Pour x dans E , on pose $u(x) = (a|x)b + (b|x)a$.

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E .
2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de u

Exercice 27 (*Mines 2005*)

Soit E un espace euclidien.

1. Qu'appelle-t-on endomorphisme symétrique de E ?
2. Propriétés des endomorphismes symétriques ?
3. Soit f un endomorphisme symétrique de E . Existe-t-il g symétrique tel que $g^5 = f$? g est-il unique ?

Exercice 28 (*Mines 2013*)

Soient A et $B \in S_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $\text{Sp}(A) \subset [a; b]$ et que $\text{Sp}(B) \subset [a'; b']$.

Montrer que $\text{Sp}(A + B) \subset [a + a'; b + b']$.

Exercice 29 (Centrale 2014)

Soient E un espace euclidien et a, b, c trois éléments de E .

Soit $M = \begin{pmatrix} (a|a) & (b|a) & (c|a) \\ (a|b) & (b|b) & (c|b) \\ (a|c) & (b|c) & (c|c) \end{pmatrix}$

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

Exercice 30 (Centrale maths 2 2019)

On considère $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille 3.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. On définit la matrice $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, et on note

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ (resp. $\mu_1 \leq \mu_2$) les valeurs propres de A (resp. $\hat{A}$) rangées par ordre croissant.

1. Écrire une fonction `symetrique()` qui ne prend aucun argument et qui renvoie une matrice aléatoire de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont compris entre 0 et 1.
2. Pour une liste python `L`, la commande `L=sorted(L)` renvoie la liste rangée par ordre croissant. Afficher $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ et $[\mu_1, \mu_2]$ sur une dizaine d'exemples. Que peut-on conjecturer quant à la position de μ_1 et μ_2 par rapport à λ_1, λ_2 et λ_3 ?

Réponse

On conjecture :

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3$$

3. On suppose pour cette question que A est inversible et on note C_1, C_2, C_3 ses colonnes. On note B la matrice A^{-1} .
 - a. Calculer $b_{1,3}C_1 + b_{2,3}C_2 + b_{3,3}C_3$.
 - b. Exprimer $\det(\hat{A})$ sous la forme d'un déterminant de taille 3 dont les deux premières colonnes sont les colonnes de A . En déduire une expression simple de $b_{3,3}$.

4. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = U^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} U$.

5. On note χ_A et $\chi_{\hat{A}}$ les polynômes caractéristiques de A et de $\hat{A}$. En exprimant le coefficient en bas à droite de $(tI_3 - A)^{-1}$ de deux manières différentes, montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$:

$$\frac{\chi_{\hat{A}}(t)}{\chi_A(t)} = \frac{c_1}{t - \lambda_1} + \frac{c_2}{t - \lambda_2} + \frac{c_3}{t - \lambda_3}$$

6. Démontrer la conjecture émise à la question 2.

Exercice 31 (X 2018)

Soient f et g deux projections orthogonales de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique). Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

2.3 Endomorphismes et matrices symétriques positifs

Exercice 32 (*X 2016*)

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que :

$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (AX|X) > 0.$

Montrer que si X est non nul, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(A^{k+1}X|X)}{(A^k X|X)}$ existe et vaut une valeur propre de A .

Exercice 33 (*Centrale Maths2 2018*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n la matrice à $n+1$ lignes et $n+1$ colonnes définie par :

$H_n = (c_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n}$

1. Montrer que H_n est diagonalisable.
2. Ecrire une fonction retournant H_n .
3. Pour $n = 1$ et $n = 2$ montrer avec rigueur que $\det(H_n) = 1$ et que $\text{Sp}(H_n) \subset \mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer l'équivalence :
 - (α) A est symétrique réelle et $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
 - (β) $\exists T \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ tq $A = T^T T$