ALGEBRE LINEAIRE
TD
2024-2025
Chapitre 6
Correction

941

1 Produits scalaires : révisions de première année

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que :
$\forall x \in [a, b]\ f(x) > 0$
Montrer que : $\displaystyle\int_{[a,b]} f. \int_{[a,b]} \frac{1}{f} \geq (b-a)^2$
Montrer qu'il y a égalité si et seulement si f est constante.

Correction
Soit $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(f|g) = \displaystyle\int_{[a,b]} fg$.
On applique Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$.
$\left|\displaystyle\int_{[a,b]} \sqrt{f}\frac{1}{\sqrt{f}}\right| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} f}\sqrt{\int_{[a,b]} \frac{1}{f}}$
$(b-a)^2 \leq \displaystyle\int_{[a,b]} f. \int_{[a,b]} \frac{1}{f}$

$$\begin{aligned}
\text{il y a égalité} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \frac{\lambda}{\sqrt{f}} = \sqrt{f} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } f = \lambda \\
&\iff f \text{ constante}
\end{aligned}$$

Exercice 2 *(X 2015)*

Soit E un espace euclidien et F,G deux sev de E tels que $\dim F + \dim G > \dim E$.
Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $x \in F \cap G$.

Correction
$\dim (F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim (F + G) \geq \dim F + \dim G - \dim E > 0$

Par conséquent, il existe un vecteur y non nul dans $F \cap G$.
Le vecteur $x = \dfrac{y}{\|y\|}$ répond à la question.

Exercice 3

Soient E un ev euclidien et E_1, E_2 2 sev de E.
Montrer que $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$ et $(E_1 \cap E_2)^\perp = E_1^\perp + E_2^\perp$.

Correction

1. $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$.
   $E_1 \subset E_1 + E_2$ donc $(E_1 + E_2)^\perp \subset E_1^\perp$.
   $E_2 \subset E_1 + E_2$ donc $(E_1 + E_2)^\perp \subset E_2^\perp$.
   D'où $(E_1 + E_2)^\perp \subset E_1^\perp \cap E_2^\perp$.
   Réciproquement soit $x \in E_1^\perp \cap E_2^\perp$.
   Soit $y \in E_1 + E_2$.
   $\exists (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ tq $y = y_1 + y_2$
   $(x|y_1 + y_2) = (x|y_1) + (x|y_2) = 0 + 0 = 0$
   Donc $x \in (E_1 + E_2)^\perp$
   D'où : $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$
   Remarque
   On n'a pas eu besoin de $\dim E < +\infty$.
2. $E_1 \cap E_2 = (E_1^\perp)^\perp \cap (E_2^\perp)^\perp = (E_1^\perp + E_2^\perp)^\perp$
   D'où : $(E_1 \cap E_2)^\perp = (E_1^\perp + E_2^\perp)^{\perp\perp} = E_1^\perp + E_2^\perp$
   En dimension infinie cela peut être faux quoiqu'on ait toujours
   $E_1^\perp + E_2^\perp \subset (E_1 \cap E_2)^\perp$
   En effet $E_1 \cap E_2 \subset E_1 \Rightarrow E_1^\perp \subset (E_1 \cap E_2)^\perp$...

Exercice 4

Soient E un ev euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E.
Soit $H = \{x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ tq $x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
Donner une BON de H.

Correction

On prend $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, V_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -(n-1) \end{pmatrix}$.

On norme alors ces vecteurs :
$\|V_k\|^2 = k + k^2 = k(k+1)$
$\epsilon_k = \dfrac{V_k}{\sqrt{k(k+1)}}$

Exercice 5 *(Mines 2014)*

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $Y \in \mathbb{R}^n$.
   Montrer qu'il existe un unique $X \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ et un unique $X' \in (\operatorname{Im} A)^\perp$ tels que $Y = A\,X + X'$.
2. Soit $G \begin{cases} \mathbb{R}^n \to (\operatorname{Ker} A)^\perp \\ Y \mapsto X \end{cases}$.
   On admet que G est linéaire.
   Déterminer $\operatorname{Ker} G$ et $\operatorname{Im} G$.

Correction

1. Cette question peut sûrement être traitée très abstraitement mais je privilégie une approche élémentaire.
   - **Unicité**
     On suppose qu'il existe X_1 et $X_2 \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ ainsi que X_1' et $X_2' \in (\operatorname{Im} A)^\perp$ tels que $Y = A\,X_1 + X_1' = A\,X_2 + X_2'$.
     $X_1' - X_2' = A\,(X_2 - X_1) \in \operatorname{Im}(A)$ mais $X_1' - X_2' \in (\operatorname{Im} A)^\perp$ donc $X_1' = X_2'$.
     On en déduit $A\,(X_2 - X_1) = 0$ ie $X_2 - X_1 \in \operatorname{Ker} A$. Mais $X_2 - X_1 \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ donc $X_1 = X_2$
   - **Existence**
     Il existe $Y_1 \in \operatorname{Im} A$ et $X' \in (\operatorname{Im} A)^\perp$ tels que $Y = Y_1 + X'$.
     Il existe $Y_2 \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y_1 = A\,Y_2$.
     Il existe $X \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ et $Y_3 \in \operatorname{Ker} A$ tels que $Y_2 = X + Y_3$.
     $Y_1 = A\,Y_2 = A\,X$ donc $Y = Y_1 + X' = A\,X + X'$.
2. - Soit $Y \in \operatorname{Ker} G$.
     $Y = A\,X + X' = A \times 0 + X' = X' \in (\operatorname{Im} A)^\perp$
     Donc $\operatorname{Ker} G \subset (\operatorname{Im} A)^\perp$.
     Réciproquement, soit $Y \in (\operatorname{Im} A)^\perp$.
     $Y = A \times 0 + Y$ avec $0 \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ et $Y \in (\operatorname{Im} A)^\perp$ donc $G(Y) = 0$ ie $Y \in \operatorname{Ker} G$.
     Donc $(\operatorname{Im} A)^\perp \subset \operatorname{Ker} G$.
     Finalement $\operatorname{Ker} G = (\operatorname{Im} A)^\perp$.
   - $\operatorname{Im} G \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp$ et

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Im} G) &= n - \dim(\operatorname{Ker} G) \\ &= n - \dim\left((\operatorname{Im} A)^\perp\right) = \dim(\operatorname{Im} A) \\ &= n - \dim(\operatorname{Ker} A) \\ &= \dim\left((\operatorname{Ker} A)^\perp\right) \end{aligned}$$

     Finalement $\operatorname{Im} G = (\operatorname{Ker} A)^\perp$

Exercice 6 *(Centrale 2006)*

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soient $u(1,1,1,0)$ et $v(1,1,0,1)$.
Trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(u,v)$.

Correction

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
$p(x) = au + bv$
a et b sont déterminés par la condition $x - p(x) \perp \mathrm{Vect}(u, v)$ ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} a(u|u) + b(u|v) = (u|x) \\ a(u|v) + b(v|v) = (v|x) \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 2b = (u|x) \\ 2a + 3b = (v|x) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 9a + 6b = 3(u|x) \\ 4a + 6b = 2(v|x) \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{3(u|x) - 2(v|x)}{5} \\ b = \dfrac{(v|x) - 2a}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4}{5} \\ b = \dfrac{5(v|x) - 2(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4)}{15} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4}{5} \\ b = \dfrac{3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 9x_4}{15} = \dfrac{x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4}{5} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4}{5}(1,1,1,0) + \frac{x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4}{5}(1,1,0,1) \\ &= \frac{1}{5}\left(2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4, x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4\right) \end{aligned}$$

La réponse est donc $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Autre méthode
On orthonormalise (u, v).
On pose $\epsilon_1 = \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} u$.
On note ensuite w le projeté orthogonal de v sur la droite $\mathbb{R}u$.
$w = (\epsilon_1|v)\epsilon_1 = \dfrac{(u|v)}{\|u\|^2} u = \dfrac{2}{3} u$
$v - w = \dfrac{1}{3}(1, 1, -2, 3)$ et on pose $\epsilon_2 = \dfrac{v - w}{\|v - w\|} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, -2, 3)$
On a alors $p(x) = (\epsilon_1|x)\epsilon_1 + (\epsilon_2|x)\epsilon_2$.
Donc $p(x) = \dfrac{1}{3}(u|x)u + \dfrac{1}{15}((1, 1 - 2, 3)|x)(1, 1, -2, 3)$
On a donc $p((1, 0, 0, 0)) = \dfrac{1}{3}(1, 1, 1, 0) + \dfrac{1}{15}(1, 1, -2, 3) = \dfrac{1}{5}(2, 2, 1, 1)$ ce qui donne la première colonne.
Il ne reste plus qu'à faire la même chose pour les autres colonnes.

Exercice 7 *(Centrale 2018)*

Soient $E = \mathbb{R}_4[X]$ et, pour $P, Q \in E$, $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-2}^{2} PQ$.

1. Vérifier que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

2. Montrer que le sous-espace constitué des polynômes pairs de E et le sous-espace constitué des polynômes impairs de E sont supplémentaires orthogonaux.
3. Déterminer une base orthonormée de E.
4. Soit $f : P \in E \mapsto 2XP' + (X^2 - 4)P''$. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

Correction

1. • $< .,. >$ est symétrique :

$$\begin{array}{rcl} \forall (P,Q) \in E^2 \ < P, Q > & = & \displaystyle\int_{-2}^{2} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_{-2}^{2} Q(x)P(x)\,\mathrm{d}x \text{ car le produit est commutatif dans } \mathbb{R} \\ & = & < Q, P > \end{array}$$

• $< .,. >$ est linéaire à droite :

$$\begin{array}{rl} & \forall (P,Q_1,Q_2) \in E^3 \ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \ < P, \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 > \\ = & \displaystyle\int_{-2}^{2} P(x)\left(\lambda_1 Q_1(x) + \lambda_2 Q_2(x)\right)\,\mathrm{d}x \\ = & \lambda_1 \displaystyle\int_{-2}^{2} P(x)Q_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \displaystyle\int_{-2}^{2} P(x)Q_2(x)\,\mathrm{d}x \text{ linéarité de l'intégrale} \\ = & \lambda_1 < P, Q_1 > + \lambda_2 < P, Q_2 > \end{array}$$

• De la linéarité à droite et de la symétrie, on déduit la linéarité à gauche.

• $\forall P \in E \ < P, P > = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left(P(x)^2 \geq 0\right)\,\mathrm{d}x \geq 0$
De plus $x \mapsto P(x)^2$ étant continue, si $< P, P > = 0$ alors :
$\forall x \in [-2; 2] \ P(x)^2 = 0$
P ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

2. Soit E_P le sous-espace constitué des polynômes pairs de E.
Soit E_I le sous-espace constitué des polynômes impairs de E.
$\forall (P,Q) \in E_P \times E_I \ < P, Q > = \displaystyle\int_{-2}^{2} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = 0$ car la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)$ est impaire. Donc $E_P \perp E_i$.
Soit $P \in E$.
Soit $P_1(X) = \dfrac{P(X) + P(-X)}{2}$.
P_1 est un polynôme pair de degré inférieur ou égal à celui de P donc $P_1 \in E_P$.
Soit $P_2(X) = \dfrac{P(X) - P(-X)}{2}$.
P_2 est un polynôme impair de degré inférieur ou égal à celui de P donc $P_2 \in E_I$.
De plus $P = P_1 + P_2$.
On a bien $E = P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_2$.

3. L'idée est de travailler séparément dans le sous-espace constitué des polynômes pairs de E et le sous-espace constitué des polynômes impairs de E .
On orthogonalise la base $(1, X^2, X^4)$ de E_P.
On pose donc $P_1 = 1$.

La norme de P_1 est 2.
On cherche ensuite $P_2 = X^2 + aP_1$, orthogonal à P_1.

$$\begin{aligned} < P_2, P_1 > &= < X^2, 1 > + a \|P_1\|^2 = 2\int_0^2 x^2 \, \mathrm{d}x + 4a \\ &= \frac{16}{3} + 4a \end{aligned}$$

On prend donc $a = -\frac{4}{3}$ et $P_2 = X^2 - \frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} \|P_2\|^2 &= \int_{-2}^2 \left(x^2 - \frac{4}{3}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^2 \left(x^4 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{9}\right) \mathrm{d}x \\ &= 2\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{9} + \frac{32}{9}\right) = 64\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) \\ &= \frac{256}{45} = \frac{2^8}{3^2 \times 5} \\ \|P_2\| &= \frac{2^4}{3\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$

On cherche ensuite $P_3 = X^4 + aP_2 + bP_1$ orthogonal à P_1 et P_2.

$$\begin{aligned} < P_3, P_1 > &= < X^4, 1 > + a < P_2, P_1 > + b \|P_1\|^2 = 2\int_0^2 x^4 \, \mathrm{d}x + 4b \\ &= \frac{64}{5} + 4b \end{aligned}$$

On prend donc $b = -\frac{16}{5}$.

$$\begin{aligned} < P_3, P_2 > &= < X^4, P_2 > + a \|P_2\|^2 + b < P_2, P_1 > = 2\int_0^2 \left(x^6 - \frac{4}{3}x^4\right) \mathrm{d}x + \frac{256}{45}a \\ &= 2\left(\frac{2^7}{7} - \frac{2^7}{15}\right) + \frac{2^8}{45}a \\ &= 2^8\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{15} + \frac{a}{45}\right) \end{aligned}$$

On prend donc $a = -45\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{15}\right) = -\frac{8 \times 5 \times 9}{3 \times 5 \times 7} = -\frac{24}{7}$.
On a donc :

$$\begin{aligned} P_3 &= X^4 - \frac{24}{7}\left(X^2 - \frac{4}{3}\right) - \frac{16}{5} = X^4 - \frac{24}{7}X^2 + \frac{32}{7} - \frac{16}{5} \\ &= X^4 - \frac{24}{7}X^2 + 16\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) \\ &= X^4 - \frac{24}{7}X^2 + + \frac{48}{35} \end{aligned}$$

$X^4 = P_3 - aP_2 - bP_1$ avec (P_1, P_2, P_3) famille orthogonale donc :
$\|X^4\|^2 = \|P_3\|^2 + a^2 \|P_2\|^2 + b \|P_1\|^2$

et :

$$\begin{aligned}
\|P_3\|^2 &= 2\int_0^2 x^8 \,\mathrm{d}x - \frac{2^6 3^2}{7^2}\frac{2^8}{3^2\times 5} - \frac{2^8}{5^2}4 \\
&= 2^{10}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{2^4\times 3^2}{3^2\times 5\times 7^2} - \frac{1}{5^2}\right) = 2^{10}\frac{5^2\times 7^2 - 2^4\times 3^2\times 5 - 3^2\times 7^2}{3^2\times 5^2\times 7^2} \\
&= \frac{2^{10}\times 64}{3^2\times 5^2\times 7^2} = \frac{2^{16}}{3^2\times 5^2\times 7^2} \\
\|P_3\| &= \frac{2^8}{3\times 5\times 7} = \frac{256}{105}
\end{aligned}$$

On orthogonalise ensuite la base (X, X^3) de E_I.
On pose donc $Q_1 = X$.

$$\begin{aligned}
\|Q_1\|^2 &= \int_{-2}^2 x^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{16}{3} \\
\|Q_1\| &= \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Si on se souvient des formules, on peut écrire :
$Q_2 = X^3 - \dfrac{< Q_1, X^3 >}{\|Q_1\|^2}Q_1$
(on retranche à Q_2 son projeté orthogonal sur $\mathbb{R}Q_1$)
$< Q_1, X^3 >= \displaystyle\int_{-2}^2 x^4 \,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{2^6}{5}$ donc :

$$Q_2 = X^3 - \frac{2^6}{5}\frac{3}{2^4}X = X^3 - \frac{12}{5}X$$

Par Pythagore :

$$\begin{aligned}
\|Q_2\|^2 &= \left\|X^3\right\|^2 - \left\|\frac{< Q_1, X^3 >}{\|Q_1\|^2}Q_1\right\|^2 \\
&= \frac{2^8}{7} - \frac{< Q_1, X^3 >^2}{\|Q_1\|^2} = \frac{2^8}{7} - \frac{2^{12}}{5^2}\frac{3}{2^4} \\
&= 2^8\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{25}\right) = \frac{2^{10}}{7\times 5^2} \\
\|Q_2\| &= \frac{2^5}{5\sqrt{7}} = \frac{32}{35}\sqrt{7}
\end{aligned}$$

$\left(\dfrac{P_1}{\|P_1\|}, \dfrac{P_2}{\|P_2\|}, \dfrac{P_3}{\|P_3\|}, \dfrac{Q_1}{\|Q_1\|}, \dfrac{Q_2}{\|Q_2\|}\right)$ est une base orthonormée de E.

4.

$$\begin{aligned}
\forall (P,Q)\in E\ (f(P)|Q) &= \int_{-2}^{2}\Big(2xP'(x)+(x^2-4)P''(x)\Big)\,Q(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \Big[(x^2-4)P'(x)Q(x)\Big]_{-2}^{2}-\int_{-2}^{2}(x^2-4)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{-2}^{2}(x^2-4)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\Big[(x^2-4)P(x)Q'(x)\Big]_{-2}^{2}+\int_{-2}^{2}P(x)\Big(2xQ'(x)+(x^2-4)Q''(x)\Big)\,\mathrm{d}x\\
&= (P|f(Q))
\end{aligned}$$

Exercice 8

Soit $F\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (a,b)\mapsto \displaystyle\int_0^{\pi}(a\sin t+b\cos t-t)^2\,\mathrm{d}t\end{cases}$.
Prouver que F possède un minimum et donner sa valeur.

Correction
On considère $E=\mathcal{C}^0([0;\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire classique défini par :
$\forall (f,g)\in E\ (f|g)=\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$
Soit $e_1\begin{cases}[0;\pi]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto t\end{cases}$.
$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\ F(a,b)=\|a\sin+b\cos-e_1\|^2=\|e_1-(a\sin+b\cos)\|^2$
On en déduit que F possède un minimum atteint une fois et une seule lorsque $a\sin+b\cos$ est le projeté orthogonal de e_1 sur $\mathrm{Vect}(\sin,\cos)$.
Au minimum, a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases}(e_1-(a\sin+b\cos)|\sin)=0\\ (e_1-(a\sin+b\cos)|\cos)=0\end{cases}\iff\begin{cases}a\|\sin\|^2+b(\cos|\sin)=(e_1|\sin)\\ a(\sin|\cos)+b\|\cos\|^2=(e_1|\cos)\end{cases}$$

Quelques calculs d'intégrales sont nécessaires :

$$\begin{aligned}
\|\sin\|^2 &= \int_0^{\pi}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\\
\|\cos\|^2 &= \int_0^{\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\\
(\sin|\cos) &= \int_0^{\pi}\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-\cos(2t)}{4}\right]_0^{\pi}=0\\
(e_1|\sin) &= \int_0^{\pi}t\sin(t)\,\mathrm{d}t=[-t\cos(t)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos(t)\,\mathrm{d}t=\pi+[\sin(t)]_0^{\pi}=\pi\\
(e_1|\cos) &= \int_0^{\pi}t\cos(t)\,\mathrm{d}t=[t\sin(t)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{d}t=[\cos(t)]_0^{\pi}=-2
\end{aligned}$$

La résolution du système est triviale et donne $a=2$ et $b=-\dfrac{4}{\pi}$.

Avec Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} F_{min} &= \|e_1\|^2 - \|a\sin + b\cos\|^2 \\ &= \int_0^\pi t^2 \,\mathrm{d}t - a^2 \|\sin\|^2 - b^2 \|\cos\|^2 \\ &= \frac{\pi^3}{3} - 2\pi - \frac{8}{\pi} \simeq 1,51 \end{aligned}$$

Exercice 9 *(Mines 2015. L'examinatrice n'a pas demandé de mener les calculs jusqu'au bout.)*

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_{2n}[X] \times \mathbb{R}_{2n}[X] \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k) \end{cases}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Trouver une base orthonormée de $Vect(1,X)$.
3. Donner deux méthodes de calcul de $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|X^2 - aX - b\|^2$.

Correction

1. • φ est symétrique :
   $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_{2n}[X] \times \mathbb{R}_{2n}[X]\ \varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k) = \sum_{k=-n}^{n} Q(k)P(k) = \varphi(Q,P)$

   • φ est linéaire à droite :

$$\begin{aligned} &\forall (P,Q,R) \in \mathbb{R}_{2n}[X]^3\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \varphi(P, aQ+bR) \\ =\ & \sum_{k=-n}^{n} P(k)(aQ+bR)(k) = \sum_{k=-n}^{n} P(k)\left(aQ(k)+bR(k)\right) \\ =\ & \sum_{k=-n}^{n} \left(aP(k)Q(k) + bP(k)R(k)\right) = a\sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k) + b\sum_{k=-n}^{n} P(k)R(k) \\ =\ & a\varphi(P,Q) + b\varphi(P,R) \end{aligned}$$

   • φ est linéaire à gauche : découle de la linéarité à droite et de la symétrie

   • φ est définie positive :
   $\forall P \in \mathbb{R}_{2n}[X]\ \varphi(P,P) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} P(k)^2 \geq 0$ comme somme de réels positifs

   De plus :

$$\begin{aligned} \varphi(P,P) = 0 &\iff \forall k \in [\![-n;n]\!]\ P(k)^2 = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![-n;n]\!]\ P(k) = 0 \\ &\iff P = 0 \text{ } 2n+1 \text{ racines pour un polynôme de degré au plus } 2n \end{aligned}$$

2. Il faut supposer $n \geq 1$ pour que X (puis X^2 dans la question suivante) appartienne à $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
   $\varphi(1,X) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} k = 0$ par parité.

$(1, X)$ est orthogonale.

$\|1\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} 1^2 = 2n+1$

$\|X\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} k^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$.

La famille $(\epsilon_0, \epsilon_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \sqrt{\frac{3}{n(n+1)(2n+1)}}X\right)$ est une base orthonormée de $Vect(1, X)$.

3. • **Première méthode**

Le projeté orthogonal de X^2 sur $Vect(1, X)$ est $\varphi(\epsilon_0, X^2)\epsilon_0 + \varphi(\epsilon_1, X^2)\epsilon_1$.

Le minimum cherché est par Pythagore :

$\|X^2\|^2 - \|\varphi(\epsilon_0, X^2)\epsilon_0 + \varphi(\epsilon_1, X^2)\epsilon_1\|^2 = \|X^2\|^2 - \varphi(\epsilon_0, X^2)^2 - \varphi(\epsilon_1, X^2)^2$.

$$\begin{aligned}
\left\|X^2\right\|^2 &= \sum_{k=-n}^{n} k^4 = 1/15\, n\,(n+1)\,(2\,n+1)\left(3\,n^2+3\,n-1\right)\\
\varphi(\epsilon_0, X^2)^2 &= \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=-n}^{n} k^2\right)^2 = 1/9\ (n+1)^2\,(2\,n+1)\,n^2\\
\varphi(\epsilon_1, X^2)^2 &= \frac{3}{n(n+1)(2n+1)}\left(\sum_{k=-n}^{n} k^3\right)^2 = 0 \text{ par parité}\\
\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left\|X^2-aX-b\right\|^2 &= 1/45\ (2\,n+3)\,(2\,n+1)\,(2\,n-1)\,(n+1)\,n
\end{aligned}$$

• **Deuxième méthode**

$$\begin{aligned}
\left\|X^2-aX-b\right\|^2 &= \left\|X^2\right\|^2 + a^2\|X\|^2 + b^2\|1\|^2 - 2a\varphi(X^2,X) - 2b\varphi(X^2,1) + 2ab\varphi(X,1)\\
&= \left\|X^2\right\|^2 + a^2\|X\|^2 + b^2\|1\|^2 - 2a\times 0 - 2b\varphi(X^2,1) + 2ab\times 0\\
&= \left\|X^2\right\|^2 + a^2\|X\|^2 + \left(b\,\|1\| - \frac{\varphi(X^2,1)}{\|1\|}\right)^2 - \frac{\varphi(X^2,1)^2}{\|1\|^2}
\end{aligned}$$

Le minimum cherché est donc :

$\|X^2\|^2 - \frac{\varphi(X^2,1)^2}{\|1\|^2} = \|X^2\|^2 - \left(\varphi\left(\frac{1}{\|1\|}, X^2\right)\right)^2 = \|X^2\|^2 - \varphi(\epsilon_0, X^2)^2$.

On retrouve le résultat précédent.

Exercice 10 *(Centrale)*

Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$\forall x \in E\ \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E.

Correction

La dimension de E est a priori inconnue (elle n'est même pas supposée finie).

$\forall j \in \{1;\dots;n\}\ \|e_j\|^2 = 1 = \sum_{i=1}^{n}(e_i|e_j)^2 = 1 + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(e_i|e_j)^2$

Donc : $\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(e_i|e_j)^2 = 0$

Donc $\forall j \in \{1;\dots;n\}\ \forall i \in \{1;\dots;n\}\setminus\{j\}\ (e_i|e_j) = 0$

Donc $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs unitaires donc une famille orthonormée donc libre.

Soit $F = Vect(e_1,\dots,e_n)$.

On veut prouver $F = E$.

Soient $x \in E$ et y la projection orthogonale de x sur F

$y = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$

Donc $\|x-y\|^2 = d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$ (cours) $= 0$

Donc $x = y$ et $x \in F$.

$(e_1,\dots,e_n)$ est libre et génératrice donc c'est une base de E. Comme c'est aussi une famille orthonormale c'est bien une BON de E.

Exercice 11 *(Mines 2021)*

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$< A, B >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(U, U^2,\dots,U^{n-1})$ est une base de $F = \mathrm{Vect}(U, U^2,\dots,U^{n-1})$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

   Donner le projeté orthogonal de A sur F.

Correction

1. Soit $(a_1,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tq $a_1U + \dots + a_{n-1}U^{n-1} = 0$.

   $$a_1U + \dots + a_{n-1}U^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & 0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_3 & & & & \\ a_2 & a_3 & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & & \end{pmatrix} \quad (\dagger)$$

   Donc les a_i sont tous nuls et la famille $(U,\dots,U_{n-1})$ est libre.

Comme elle est génératrice de F c'est une base de F.

Remarque
Un examinateur peut demander des précisions sur la formule (†) et on doit alors justifier avec précision le calcul des puissances de U.
Pour contourner la difficulté, on peut remarquer que si $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors $Ue_1 = e_n$ et pour tout i compris entre 2 et n, $Ue_i = e_{i-1}$.
Une récurrence élémentaire donne alors :
$\forall i \in [\![1;n-1]\!]\ U^i e_1 = e_{n+1-i}$
On se donne alors $a_1,\dots,a_{n-1}$ $n-1$ nombres réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i U^i = 0$.
En particulier $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i U^i e_1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_{n+1-i} = 0$
Les indices $n+1-i$ étant deux à deux distincts, les a_i sont tous nuls.

2. La famille $(U,\dots,U_{n-1})$ est orthogonale et ses éléments sont tous de norme $\sqrt{n}$.
Par conséquent, si on note B le projeté orthogonal de A sur F, on a :

$$B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{< U^i, A >}{n} U^i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} U^i = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1\dots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 *(Mines 2022)*

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\varphi(M) = \mathrm{tr}\,(M^T N)$.
Soit $G = \{\alpha I_n, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

1. Trouver l'orthogonal de G pour φ.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Donner une expression de ses projetés orthogonaux sur G et sur $G^\perp$.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (le sev de E formé par les matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (le sev de E formé par les matrices antisymétriques) sont supplémentaires.
4. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour φ.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer $\displaystyle\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1\le i,j\le n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2\right)$.
   (b) Déterminer $\displaystyle\inf_{M\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1\le i,j\le n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2\right)$.

Correction

1. $G^\perp = I_n^\perp$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.
2. $\left(\dfrac{I_n}{\sqrt{n}}\right)$ est une BON de G.
Le projeté orthogonal de A sur G est donc $\varphi\left(\dfrac{I_n}{\sqrt{n}}, A\right)\dfrac{I_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\mathrm{tr}\,(A)}{n} I_n$.
Le projeté orthogonal de A sur $G^\perp$ est $A - \dfrac{\mathrm{tr}\,(A)}{n} I_n$.

3. Plusieurs solutions sont possibles, cf le cours de Sup.
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $A^T = A$.
$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $A^T = -A$.
Donc $A = -A$ et $A = 0$.
Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ et la somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est directe.
$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) &= \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \\ &= \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \\ &= \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \end{aligned}$$
D'où : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}\,(A^T B) = \mathrm{tr}\,(AB) = -\mathrm{tr}\,(AB^T) = -\mathrm{tr}\,(B^T A) = -\varphi(B, A) = -\varphi(A, B)$
Donc $\varphi(A, B) = 0$.
5. $A = \dfrac{A + A^T}{2} + \dfrac{A - A^T}{2}$ avec $\dfrac{A + A^T}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{A - A^T}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
D'après la question précédente :
$\dfrac{A + A^T}{2}$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
$\dfrac{A - A^T}{2}$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
D'après le cours de Sup sur les projections orthogonales :
$\displaystyle\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \le i,j \le n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right) = \varphi\left(\frac{A - A^T}{2}, \frac{A - A^T}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$
$\displaystyle\inf_{M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \le i,j \le n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right) = \varphi\left(\frac{A + A^T}{2}, \frac{A + A^T}{2} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le n} (a_{i,j} + a_{j,i})^2$

Exercice 13 *(Mines 2021)*

Soient E un espace préhilbertien réel et $a, b \in E \setminus \{0\}$.
Soit $\varphi \begin{cases} E \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(x|a).(x|b)}{\|x\|^2} \end{cases}$.
Déterminer $\inf \varphi$ et $\sup \varphi$.

Correction
Si a ou b est nul alors :
$\forall x \in E \setminus \{0\}\ \varphi(x) = 0$
$\inf \varphi = \sup \varphi = 0$
Dans la suite, on suppose a et b non nuls.
On commence par examiner le cas où a et b sont colinéaires.
$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tq $b = \lambda a$.
$\forall x \in E \setminus \{0\}\ \varphi(x) = \lambda \left(\dfrac{(a|x)}{\|x\|} \right)^2$

D'après Cauchy-Schwarz :
Si E est de dimension 1, alors φ est constante égale à $\lambda \|a\|^2 = (a|b)$. $\inf \varphi = \sup \varphi = (a|b)$.
Si E est de dimension strictement supérieure à 1, $\varphi(x)$ est compris entre 0 atteint pour x orthogonal à a et $\lambda \|a\|^2 = (a|b)$ atteint pour x colinéaire à a.
Ces valeurs fournissent la borne inférieure et la borne supérieure de φ mais il faut tenir compte du signe de λ (ie a et b sont-ils colinéaires et de même sens ou de sens opposés ?)
$\forall x \in E \setminus \{0\}\ \varphi(x) = \dfrac{\|a\|\,\|b\|}{\|x\|^2}\left(x, \dfrac{a}{\|a\|}\right)\left(x, \dfrac{b}{\|b\|}\right)$
On pose $c = \dfrac{a}{\|a\|}$ et $d = \dfrac{b}{\|b\|}$
c et d sont deux vecteurs unitaires.

On commence par regarder ce qui se passe dans le plan $\mathrm{Vect}(a, b)$.
On peut le munir d'une BON et l'identifier au plan complexe.
Comment choisir cette BON ?
Pour préserver la symétrie des rôles de a et de b, on la choisit pour que c et d aient des affixes d'arguments opposés ie que son premier axe est dirigé par $c + d$.
On a alors c d'affixe $z_c = \mathrm{e}^{-i\phi}$ et d d'affixe $z_d = \mathrm{e}^{i\phi}$ avec $0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{2}$.
Si $z_x = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ est l'affixe de x alors :

$$\begin{aligned}
(c|x) &= \Re e(z_c\overline{z_x}) = \frac{1}{2}(z_c\overline{z_x} + \overline{z_c}z_x) = \frac{1}{2}\left(z_x\,\mathrm{e}^{i\phi} + \overline{z_x}\,\mathrm{e}^{-i\phi}\right)\\
&= \frac{r}{2}\left(\mathrm{e}^{i(\theta+\phi)} + \mathrm{e}^{-i(\theta+\phi)}\right) = r\cos(\theta+\phi)\\
(d|x) &= \Re e(z_d\overline{z_x}) = \frac{1}{2}(z_d\overline{z_x} + \overline{z_d}z_x) = \frac{1}{2}\left(z_x\,\mathrm{e}^{-i\phi} + \overline{z_x}\,\mathrm{e}^{i\phi}\right)\\
&= \frac{r}{2}\left(\mathrm{e}^{i(\theta-\phi)} + \mathrm{e}^{-i(\theta-\phi)}\right) = r\cos(\theta-\phi)\\
(c|x)(d|x) &= r^2\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)\\
&= \frac{r^2}{2}\left(\cos(2\theta) + \cos(2\phi)\right)\\
&= \frac{r^2}{2}\left(\cos(2\theta) + (c|d)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall x \in \mathrm{Vect}(a, b) \setminus \{0\}\ \varphi(x) = \dfrac{1}{2}\|a\|\,\|b\|\cos(2\theta) + \dfrac{1}{2}(a|b)$
puis :
$\forall x \in \mathrm{Vect}(a, b) \setminus \{0\}\ \varphi(x) \leq M = \dfrac{1}{2}\left(\|a\|\,\|b\| + (a|b)\right)$ avec égalité pour $x = c + d = \dfrac{a}{\|a\|} + \dfrac{b}{\|b\|}$ (cas $\theta = 0$)
$\forall x \in \mathrm{Vect}(a, b) \setminus \{0\}\ \varphi(x) \geq m = \dfrac{1}{2}\left(-\|a\|\,\|b\| + (a|b)\right)$ avec égalité pour $x = -c + d = -\dfrac{a}{\|a\|} + \dfrac{b}{\|b\|}$ (cas $\theta = \dfrac{\pi}{2}$)
A cause de Cauchy-Schwarz, $m \leq 0 \leq M$

Soit x un vecteur non nul de E.
Si x est orthogonal au plan $\mathrm{Vect}(a, b)$ alors $\varphi(x) = 0$ est compris entre m et M.
Sinon, $x = y + z$ avec y dans le plan et z orthogonal au plan.

$\varphi(x) = \dfrac{(a|y)(b|y)}{\|y\|^2 + \|z\|^2} = \dfrac{\|y\|^2}{\|y\|^2 + \|z\|^2}\varphi(y)$ est compris entre m et M.
Finalement, $\inf \varphi = m$ et c'est en fait un minimum et $\sup \varphi = M$ et c'est en fait un maximum.
On pourra observer qu'on obtient les mêmes valeurs lorsque a et b sont colinéaires.

2 Endomorphismes d'un espace euclidien

2.1 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 14 *(Mines 2021)*

Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots - x_{n-2} + x_{n-1} - x_n$.

Remarques

- Un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension n est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.
- Il semblerait que n soit supposé pair, mais cela a peu d'incidence sur la résolution de l'exercice.

Correction

De nombreuses méthodes sont possibles :

- L'hyperplan proposé est l'orthogonal du vecteur $v = (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$.
  La symétrie évoquée dans l'énoncé est $s = 2p - id_E$ où p est le projecteur orthogonal sur l'hyperplan proposé.
  p est donc défini par :
  $\forall x \in \mathbb{R}^n \ p(x) = x - \left(\dfrac{v}{\|v\|}|x\right)\dfrac{v}{\|v\|} = x - \dfrac{(v|x)}{\|v\|^2}v$
  On en déduit pour chaque vecteur e_i de la base canonique :
  $p(e_i) = e_i - \dfrac{(-1)^{i-1}}{n}v = e_i + \dfrac{(-1)^i}{n}v$
  La matrice de p dans la base canonique est donc :
  $$P = I_n + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 1 & n-1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & n-1 & 1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & n-1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \end{pmatrix}$$
  La matrice demandée est $S = 2P - I_n = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} n-2 & 2 & -2 & 2 & \dots \\ 2 & n-2 & 2 & -2 & \dots \\ -2 & 2 & n-2 & 2 & \dots \\ 2 & -2 & 2 & n-2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 2 & -2 & 2 & -2 & \dots \end{pmatrix}$
- **Deuxième méthode**
  Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
  $s(x)$ est caractérisé par $x + s(x) \in H$ et $s(x) - x \perp H$.
  On en déduit :
  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $s(x) = x + \lambda(1, -1, 1, \dots, 1)$.
  Donc $x + s(x) = (2x_1 + \lambda, 2x_2 - \lambda, \dots)$.

$x + s(x) \in H$ donc :
$2x_1 + \lambda - 2x_2 + \lambda \cdots = 0$
On en déduit $\lambda = \dfrac{-2}{n}(x_1 - x_2 + \dots)$ et :
$s(x) = \left(\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)x_1 + \dfrac{2}{n}x_2 - \dfrac{2}{n}x_3 \dots, -\dfrac{2}{n}x_1 + \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)x_2 + \dfrac{3}{n}x_3 \dots, \dots\right)$

On en déduit la matrice cherchée : $\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} n-2 & 2 & -2 & 2 & \dots \\ 2 & n-2 & 2 & -2 & \dots \\ -2 & 2 & n-2 & 2 & \dots \\ 2 & -2 & 2 & n-2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 2 & -2 & 2 & -2 & \dots \end{pmatrix}$

Exercice 15 *(Mines 2019)*

Soit E un espace euclidien et a un vecteur unitaire fixé de E.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f_\alpha \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x + \alpha(a|x)a \end{cases}$.

1. Montrer que $\{f_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable par produit de composition.
   Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, f_α et f_β commutent.
2. Montrer :
   $f_\alpha \in GL(E) \iff \alpha \neq -1$.
   Quel est le rang de f_{-1} ?
3. Montrer :
   $f_\alpha \in O(E) \iff \alpha = 0$ ou -2
4. Quels sont les sous-espaces propres de f_α ?

Correction

1. Il est clair que f_α est un endomorphisme de E.
   Un calcul simple donne $f_\beta \circ f_\alpha = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$
   On en déduit facilement que f_α et f_β commutent.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $f_\beta \circ f_\alpha = Id_E \iff f_{\alpha+\beta+\alpha\beta} = id_E \iff \alpha + \beta(\alpha+1) = 0$
   On en déduit que si $\alpha \neq -1$ alors f_α est inversible, d'inverse $f_{-\alpha/(\alpha+1)}$.
   Par contre si $\alpha = -1$ alors $f_{-1}(a) = 0$ et f_{-1} n'est pas inversible.
   Par double inclusion, on montre que le noyau de f_{-1} est la droite $\mathbb{R}a$.
   Le rang de f_{-1} est donc $n-1$.
   On peut d'ailleurs remarquer que f_{-1} est la projection orthogonale sur $a^\perp$.
3. $f_\alpha(a) = (1+\alpha)a$
   D'où la condition nécessaire $1 + \alpha = 1$ ou -1 et $\alpha = 0$ ou -2.
   $\alpha = 0$ est clairement suffisante.
   Si $\alpha = -2$, classiquement f_{-2} est la symétrie orthogonale par rapport à $a^\perp$.
4. Si $x \perp a$ alors $f_\alpha(x) = x$.
   $f_\alpha(a) = (1+\alpha)a$
   Dans le cas $\alpha = 0$, $f_\alpha = id_E$ et ses éléments propres sont clairs.
   Sinon, les sous-espaces propres sont $\mathbb{R}a$ et $a^\perp$ (il n'y a pas la place d'ne mettre d'autres, on peut aussi écrie la matrice de f_α dans une BON adaptée à $E = a^\perp \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}a$).

Exercice 16

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté.

1. Montrer que toute rotation de E peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.
2. Est-ce que toute réflexion de E peut s'écrire comme la composée de deux rotations ?

Correction

1. Soit r une rotation de E.
   Soit s une réflexion de E.
   Soit $\sigma = r \circ s$.
   σ est la composée de deux automorphismes orthogonaux donc σ est un automorphisme orthogonal.
   De plus $\det(\sigma) = \det(r)\det(s) = 1 \times (-1) = -1$ donc σ est une réflexion.
   Donc $r = \sigma \circ s$ est la composée de deux réflexions.
2. Non : la composée de deux rotations est une rotation.

Exercice 17 *(Mines 2016)*

Soit u un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien E.
Soit λ une valeur propre de u.
Montrer que $\dim(E_\lambda(u)) = mult(\lambda)$.

Correction
$\lambda = \pm 1$.
On montre ensuite que $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u :
Soit $y \in E_\lambda(u)^\perp$.

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in E_\lambda(u)\ (x|u(y)) & = & \pm(\lambda x|u(y)) = \pm(u(x)|u(y)) = \pm(x|y) \\ & = & 0 \end{array}$$

On note v l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ induit par u. λ ne peut pas être valeur propre de v : on aurait un vecteur propre de u donc un vecteur non nul dans l'intersection de $E_\lambda(u)$ et de son orthogonal.
En considérant une base adaptée à $E = E_\lambda(u) \bigoplus E_\lambda(u)^\perp$, on a $\chi_u = (X-\lambda)^{\dim(E_\lambda(u))}\chi_v$ avec $\chi_v(\lambda) \neq 0$.
D'où le résultat.

Exercice 18 *(X 2009, Mines 2015)*

Calculer $\sup\limits_{A \in O(n)} \left(\sum\limits_{(i,j) \in [|1,n|]^2} a_{ij} \right)$.

Correction
On note $Can = (e_1, \dots, e_n)$.
C'est une BON de $\mathbb{R}^n$ (euclidien canonique).

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[|1,n|]^2} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(e_i|u(e_j)) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i|\sum_{j=1}^{n} u(e_j)\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i|u\left(\sum_{j=1}^{n} e_j\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[|1,n|]^2} a_{ij} &\leq \left|\sum_{(i,j)\in[|1,n|]^2} a_{ij}\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} e_i|u\left(\sum_{j=1}^{n} e_j\right)\right)\right| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\| \times \left\|u\left(\sum_{j=1}^{n} e_j\right)\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 \text{ car } u\in O(\mathbb{R}^n) \\
&\leq n \text{ avec égalité pour } A = I_n
\end{aligned}$$

La réponse est n.

Exercice 19 *(Centrale 2018)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On veut montrer :
$A^TA = B^TB \Longleftrightarrow \exists U \in O(n) \text{ tq } B = UA$

1. (a) On suppose B inversible.
   Montrer le résultat.

   (b) **Application**
   Résoudre l'équation $X^TX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On suppose que $A^TA = B^TB$ et que B n'est pas inversible.

   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B)$.

   (b) La suite de l'exercice ne m'étant pas parvenue, voici une possibilité :
   Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. On note r ce nombre.

   (c) Montrer que les valeurs propres de $A^TA = B^TB$ sont positives.
   On les note $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

   (d) Montrer qu'il existe $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ une BON de $\mathbb{R}^n$ telle que :
   $\forall i \in [\![1; n]\!]\ A^TA\epsilon_i = \lambda_i\epsilon_i$

   (e) On pose pour $i \in [\![1; r]\!]$ $e_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A\epsilon_i$.
   Montrer que $(e_1, \ldots, e_r)$ est une BON de $\mathrm{Im}\,(A)$.

(f) Montrer qu'il existe $U \in O(n)$ tq $B = UA$.

(g) Conclure.

Correction

1. (a)
   - On suppose $A^T A = B^T B$.
     En prenant le déterminant, on a $\det(A)^2 = \det(B)^2$ donc A est inversible.
     On peut donc poser $U = BA^{-1}$.
     $U^T U = (A^{-1})^T B^T B A^{-1} = (A^{-1})^T A^T A A^{-1} = (AA^{-1})^T = I_n$
     $U \in O(n)$ et $B = UA$.
   - On suppose : $\exists U \in O(n)$ tq $B = UA$
     $B^T B = A^T U^T U A = A^T I_n A = A^T A$

   (b) On cherche d'abord une solution.
   On cherche deux vecteurs e_1 et e_2 de norme 2 et de produit scalaire 1.
   On prend $e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.
   On cherche e_2 de la forme $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \end{pmatrix}$. $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ convient.
   La matrice $X_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ est solution.
   Les autres sont $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} X_0$ et $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} X_0$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

2. (a) On montre que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T A)$ par double inclusion.
   Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$.
   $A^T A X = A^T 0 = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}(A^T A)$.
   Donc $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^T A)$.
   Soit $X \in \mathrm{Ker}(A^T A)$.
   $\|AX\|^2 = (AX)^T(AX) = X^T A^T A X = 0$ donc $AX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}(A)$.
   Donc $\mathrm{Ker}(A^T A) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

   On a donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T A) = \mathrm{Ker}(B^T B) = \mathrm{Ker}(B)$.

   (b) Par application de la formule du rang :
   $\mathrm{rg}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(B)) = \mathrm{rg}(B)$

   (c) $A^T A$ étant symétrique réelle, elle a n valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités : $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.
   Soit X un vecteur propre de $A^T A$ associé à la valeur propre λ_n.
   $\|AX\|^2 = X^T A^T A X = \lambda_n X^T X = \lambda_n \|X\|^2$ donc $\lambda_n = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.
   Comme λ_n est la plus petite valeur propre, les autres aussi sont positives.
   B n'est pas inversible donc $B^T B$ non plus et 0 est valeur propre de $A^T A = B^T B$.
   De plus $A^T A$ étant symétrique, la multiplicité de 0 est égale à la dimension du sous-espace propre associé qui est le noyau. Par la formule du rang 0 est donc de multiplicité $n - r$.
   Les valeurs propres étant positives, 0 est la plus petite.
   On a donc bien $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

(d) Il suffit d'appliquer le théorème spectral.

(e)

$$\begin{aligned}(e_i|e_j) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}(A\epsilon_i|A\epsilon_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}(\epsilon_i|A^TA\epsilon_j)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}(\epsilon_i|\lambda_j\epsilon_j) = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\delta_{i,j} = \delta_{i,j}\end{aligned}$$

Donc $(e_1,\dots,e_r)$ est une famille ON de r vecteurs de $\mathrm{Im}\,(A)$ qui est de dimension r. C'en est donc une base orthonormée.

(f) On complète $(e_1,\dots,e_r)$ en $(e_1,\dots,e_n)$ BON de $\mathbb{R}^n$.
De même, il existe $(f_1,\dots,f_n)$ BON de $\mathbb{R}^n$ telle que :
$\forall i \in [\![1;r]\!]\ f_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}B\epsilon_i$
$(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ sont des BON de $\mathbb{R}^n$ donc il existe u automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ tel que :
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ u(e_i) = f_i$
Si on note U la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de u, on a :
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ Ue_i = f_i$
On en déduit :
$\forall i \in [\![1;r]\!]\ UA\epsilon_i = B\epsilon_i$
Par ailleurs, pour $i > r$, $A\epsilon_i = B\epsilon_i = 0$.
Donc :
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ UA\epsilon_i = B\epsilon_i$
et $UA = B$.

(g) On suppose : $\exists U \in O(n)$ tq $B = UA$
$B^TB = A^TU^TUA = A^TI_nA = A^TA$

Exercice 20 *(Mines 2023)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable.

1. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Ω et une matrice triangulaire supérieure B telles que $A = \Omega B\Omega^T$.
2. On suppose que $AA^T = A^TA$. Montrer que A est diagonalisable.
3. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

Correction

1. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A : si on note $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors u est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ est A.
Par hypothèse, il existe une base $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de u dans cette base soit une matrice triangulaire supérieure notée T :
$\forall j \in [\![1;n]\!]\ u(f_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{i,j}f_i = \sum_{i=1}^{j} t_{i,j}f_i \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_j)$.
Soit $(g_1,\dots,g_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\mathcal{C}$. Il s'agit d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ donc si on note Ω la matrice de passage de la base canonique vers cette base, Ω est une matrice orthogonale.

Soit $j \in [\![1;n]\!]$.
$g_j \in \text{Vect}(f_1,\dots,f_j)$ donc $u(g_j) \in \text{Vect}(u(f_1),\dots,u(f_j)) \subset \text{Vect}(f_1,\dots,f_j) = \text{Vect}(g_1,\dots,g_j)$ donc, si on note B la matrice de u dans la base $(g_1,\dots,g_n)$, B eset une matrice triangulaire supérieure.
Enfin les formules de changement de base donnent $A = \Omega B \Omega^T$.

2. $AA^T = \Omega B \Omega^T \Omega B^T \Omega^T = \Omega B B^T \Omega^T$
$A^T A = \Omega B^T \Omega^T \Omega B \Omega^T = \Omega B^T B \Omega^T$
Ω et Ω^T étant inversibles, on déduit de $AA^T = A^T A$, $BB^T = B^T B$.
$(B^T B)_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,1} b_{k,1} = b_{1,1}^2$
$(BB^T)_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} b_{1,k} b_{1,k} = b_{1,1}^2 + \sum_{k=2}^{n} b_{1,k}^2$
On en déduit :
$\forall k \in [\![2;n]\!]\ b_{1,k} = 0$
$(B^T B)_{2,2} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,2} b_{k,2} = b_{1,2}^2 + b_{2,2}^2 = b_{2,2}^2$
$(BB^T)_{2,2} = \sum_{k=1}^{n} b_{2,k} b_{2,k} = b_{2,2}^2 + \sum_{k=3}^{n} b_{2,k}^2$
On en déduit :
$\forall k \in [\![3;n]\!]\ b_{2,k} = 0$
Et on recommence.
On montre ainsi que B est diagonale.
A, qui est semblable à B, est donc diagonalisable.

3. Supposons A diagonalisable.
A est donc trigonalisable.
La question est donc : A commute-elle avec sa transposée ?
On prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ie une matrice triangulaire avec deux coefficients diagonaux différents (pour qu'elle soit diagonalisable) mais pas diagonale (auquel cas elle commute avec sa transposée).
$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: la réciproque est fausse.

2.2 Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 21 *(CCP 2022)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^n = 0$.

1. On suppose que $M^T = M$.
Montrer que $M = 0$.
2. On suppose que M commute avec M^T.
Montrer que $M = 0$.
3. ?

Correction

1. M est symétrique réelle donc diagonalisable en BON et :
$\exists P \in O(n)$ tq $P^T M P = D = \text{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

$\text{Diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_n^n) = D^n = \left(P^{-1}MP\right)^n = P^{-1}M^nP = 0$
Donc :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i^n = 0$
Donc :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i = 0.$
D'où $M = PDP^{-1} = P^{-1} \times 0 \times P = 0.$

2. M et M^T commutent donc $\left(MM^T\right)^n = M^n \left(M^T\right)^n = 0$
Mais MM^T est symétrique donc $MM^T = 0$.
En prise la trace, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 = 0.$
Les coefficients de M étant réels, on en déduit qu'ils sont tous nuls.
La matrice M est donc nulle.

Exercice 22 *(Mines 2019)*

Soit E un espace euclidien.
Un endomorphisme f de E est dit antisymétrique si, et seulement si :
$\forall (x, y) \in E^2\ (f(x)|y) = -(x|f(y))$

1. Montrer que $\{f \in \mathcal{L}(E) \text{ antisymétrique}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Que dire de la matrice de f dans une base orthonormée de E ?
3. Déterminer la dimension de $\{f \in \mathcal{L}(E) \text{ antisymétrique}\}$.

Correction

1. • $\{f \in \mathcal{L}(E) \text{ antisymétrique}\} \subset \mathcal{L}(E)$
   • L'endomorphisme nul est antisymétrique.
   • Soient f et g deux endomorphismes symétriques de E.
   Soient λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in E^2\ \ ((\lambda f + \mu g)(x)|y) &= (\lambda f(x) + \mu g(x)|y) = \lambda(f(x)|y) + \mu(g(x)|y) \\ &= -\lambda(x|g(y)) - \mu(x|g(y)) = -\left(x|\lambda f(y) + \mu g(y)\right) \\ &= -\left(x|(\lambda f + \mu g)(y)\right)\end{aligned}$$

   Donc $\lambda f + \mu g$ est antisymétrique.

2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
Soit f un endomorphisme de E et M sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
Soit x un vecteur de E et X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Soit y un vecteur de E et Y la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
$(f(x)|y) = (MX)^TY = X^TM^TY$ et $(x|f(y)) = X^T(MY) = X^TMY$
On en déduit :
f antisymétrique $\Longleftrightarrow \forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2\ X^TM^TY = -X^TMY$
D'où la CNS : la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est antisymétrique

3. D'après la question précédente, la dimension cherchée est celle de l'espace des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes soit : $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
En effet $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ a pour base $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \le i < j \le n}$.

Exercice 23 *(Mines 2016)*

Soit E un espace euclidien de dimension finie et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme symétrique.
Montrer que $\mathcal{C} = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } v \circ u = u \circ v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$.

Correction
u est symétrique donc diagonalisable ce qui nous ramène au chapitre 5 du cours.

Exercice 24 *(Mines 2019)*

Réduire $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Correction
A est symétrique réelle donc diagonalisable.
Le cas particulier $n = 2$ se traite de manière standard à la main. On supposera donc $n \geq 3$.
A est de rang 2 donc 0 est valeur propre de A. La dimension du sous-espace propre, qui est aussi ici la multiplicité vaut $n - 2$.
$\mathrm{Ker}\,(A) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 = x_1 + \dots + x_n = 0\}$.
Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1 + \dots, e_n)^\perp$.
$Ae_1 = e_1 + \dots, e_n$
$A(e_1 + \dots + e_n) = ne_1 + e_2 + \dots + e_n = (n-1)e_1 + e_1 + \dots, e_n$
Dans une base bien choisie, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - X - (n-1))$.
Les valeurs propres de A sont donc :

- 0 de multiplicité $n - 2$.
- $\dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$ simple
- $\dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$ simple

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$ est la droite dirigée par $(n-1)e_1 + \dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i$.
Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$ est la droite dirigée par $(n-1)e_1 + \dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i$.
Faut-il donner une base orthonormée de vecteurs propres ?

Exercice 25 *(Mines 2016)*

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

1. Montrer : $0 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq n$
   Préciser les cas d'égalité.

2. Montrer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| \leq n\sqrt{\mathrm{rg}(A)}$

Correction

1. On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   $A^2 = A$ donc u est un projecteur.
   $(e_1,\dots,e_n)$ est orthonormée et A symétrique donc u est un endomorphisme symétrique.
   u est donc un projecteur orthogonal.
   $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(e_i|u(e_j)) = \left(\sum_{i=1}^{n}e_i|u\left(\sum_{j=1}^{n}e_j\right)\right).$
   On note x le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}e_i$.
   $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j} = (x|u(x))$
   $x = x - u(x) + u(x)$
   Comme u est un projecteur orthogonal, $x - u(x) \perp u(x)$ et $(x|u(x)) = \|u(x)\|^2$.
   Donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j} = \|u(x)\|^2 \geq 0$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j} = 0 &\iff u(x) = 0\\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ \sum_{j=1}^{n}a_{i,j} = 0\end{aligned}$$

   Avec Pythagore : $\|x\|^2 = \|x-u(x)\|^2 + \|u(x)\|^2$ donc $\|u(x)\|^2 \leq \|x\|^2 = n$.
   Donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j} = \|u(x)\|^2 \leq n$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j} = n &\iff \|u(x)\|^2 = n\\ &\iff \|u(x)\|^2 = \|x\|^2\\ &\iff u(x) = x \text{ car } \|x\|^2 - \|u(x)\|^2 = \|x-u(x)\|^2\\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ \sum_{j=1}^{n}a_{i,j} = 1\end{aligned}$$

2. Soit $B = (|a_{i,j}|) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $J_n = (1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| & = & (J_n|B) = |(J_n|B)| \text{ car la somme est positive} \\
& \leq & \|J_n\|\,\|B\| = n\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2} = n\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2} \\
& \leq & n\sqrt{\operatorname{tr}(A^TA)} = n\sqrt{\operatorname{tr}(A^2)} \text{ car } A \in S_n(\mathbb{R}) \\
& \leq & n\sqrt{\operatorname{tr}(A)} \text{ car } A^2 = A \\
& \leq & n\sqrt{r(A)} \text{ c'est une propriété de projecteurs}
\end{array}$$

Exercice 26 *(Mines 2015)*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ et a et b deux vecteurs unitaires linéairement indépendants de E.
Pour x dans E, on pose $u(x) = (a|x)b + (b|x)a$.

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de u

Correction

1. u est un endomorphisme de E : trivial.
   Un calcul simple donne :
   $$\begin{array}{rcl}
   \forall (x,y) \in E^2 \ (u(x)|y) & = & (a|x)(b|y) + (b|x)(a|y) \\
   (x|u(y)) & = & (a|y)(b|x) + (a|x)(b|x)
   \end{array}$$
   u est symétrique.
2. D'après le théorème spectral, u est diagonalisable.
   (a,b) est libre donc :
   $u(x) = 0 \Longleftrightarrow (a|x) = (b|x) = 0$
   $\ker(u) = Vect(a,b)^{\perp}$ est de dimension $n-2 > 0$.
   0 est valeur propre de multiplicité $n-2$ de u.
   Il manque deux valeurs propres de u. Les vecteurs propres associés sont dans $(\ker(u))^{\perp} = Vect(a,b)$.
   La matrice dans (a,b) de l'endomorphisme de $Vect(a,b)$ induit par u est $\begin{pmatrix} (a|b) & \|b\|^2 = 1 \\ \|a\|^2 = 1 & (a|b) \end{pmatrix}$
   et on utilise la méthode habituelle.
   On peut aussi rechercher les couples propres par la méthode habituelle.
   Pour respecter la symétrie des rôles de a et de b, on peut aussi calculer :
   $$\begin{array}{rcl}
   u(a+b) & = & (a|a+b)b + (b|a+b)a = (1+(a|b))\,b + (1+(a|b))\,a \\
   & = & (1+(a|b))\,(a+b) \\
   u(a-b) & = & (a|a-b)b + (b|a-b)a = (1-(a|b))\,b + (-1+(a|b))\,a \\
   & = & (-1+(a|b))\,(a-b)
   \end{array}$$
   $1+(a|b) \neq -1+(a|b)$, $a+b$ et $a-b \neq 0$ car (a,b) est libre.
   $1+(a|b)$ et $-1+(a|b)$ sont non nuls : (a,b) libre + Cauchy-Schwarz.
   $1+(a|b)$ et $-1+(a|b)$ sont donc des valeurs propres simples et les sous-espaces propres associés sont $\mathbb{R}(a+b)$ et $\mathbb{R}(a-b)$.

Exercice 27 *(Mines 2005)*

Soit E un espace euclidien.

1. Qu'appelle-t-on endomorphisme symétrique de E ?
2. Propriétés des endomorphismes symétriques ?
3. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Existe-t-il g symétrique tel que $g^5 = f$? g est-il unique ?

Correction

1. Se reporter au cours.
2. Se reporter au cours.
3. Il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \exists \mu_i \in \mathbb{R}$ tq $\mu_i^5 = \lambda_i$
Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tq $Mat_{\mathcal{B}}(g) = Diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
g est symétrique et $g^5 = f$.

Unicité
Soient $\lambda_1, \dots ; \lambda_p$ les valeurs propres de f comptées sans leurs multiplicités de sorte que $E = E_{\lambda_1}(f) \bigoplus \dots \bigoplus E_{\lambda_p}(f)$.
Soient g et h symétriques tels que $g^5 = h^5 = f$.
$gf = fg = g^6$ et $hf = fh = f^6$ donc les sous-espaces propres de f sont stables par g et h.
Pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, soit g_i (resp h_i) l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(f)$ induit par g (resp par h).
$\forall i \in [\![1; p]\!]\ g_i^5 = h_i^5 = \lambda_i Id_{E_{\lambda_i}(f)}$

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E_{\lambda_i}(f)^2\ (g_i(x)|y) &= (g(x)|y) \\ &= (x|g(y)) \text{ car } g \text{ est symétrique} \\ &= (x|g_i(y)) \end{aligned}$$

Donc g_i est symétrique.
De même h_i est symétrique.
Donc il existe $\mathcal{B}_i$ une base orthonormée de $E_{\lambda_i}(f)$ telle que $Mat_{\mathcal{B}_i}(g_i) = Diag(\mu_1, \dots, \mu_k)$.
$g_i^5 = \lambda_i Id_{E_{\lambda_i}(f)}$ donc :
$\forall j \in [\![1; k]\!]\ \mu_j^5 = \lambda_i$
Donc :
$\forall j \in [\![1; k]\!]\ \mu_j = \sqrt[5]{\lambda_i}$
Donc $g_i = \sqrt[5]{\lambda_i} Id_{E_{\lambda_i}(f)}$
Idem pour h_i.
Donc :
$\forall i \in [\![1; p]\!]\ g_i = h_i$.
Comme $E = E_{\lambda_1}(f) \bigoplus \dots \bigoplus E_{\lambda_p}(f)$, on en déduit $g = h$.

Exercice 28 *(Mines 2013)*

Soient A et $B \in S_n(\mathbb{R})$.
On suppose que $\text{Sp}(A) \subset [a; b]$ et que $\text{Sp}(B) \subset [a'; b']$.

Montrer que $\mathrm{Sp}(A+B) \subset [a+a';b+b']$.

Correction
On démontre comme en cours :
$\forall X \in \mathbb{R}^n \; a\,\|X\|^2 \leq X^T A X \leq b\,\|X\|^2$
et
$\forall X \in \mathbb{R}^n \; a'\,\|X\|^2 \leq X^T B X \leq b'\,\|X\|^2$
En sommant ces inégalités, on a
$\forall X \in \mathbb{R}^n \; (a+a')\,\|X\|^2 \leq X^T (A+B) X \leq (b+b')\,\|X\|^2$
On prend alors λ une valeur propre de $A+B$ (elles sont toutes réelles car $A+B$ est symétrique réelle) et X un vecteur propre associé.
$(a+a')\,\|X\|^2 \leq \lambda\,\|X\|^2 \leq (b+b')\,\|X\|^2$
puis $a+a' \leq \lambda \leq b+b'$

Exercice 29 *(Centrale 2014)*

Soient E un espace euclidien et a, b, c trois éléments de E.
Soit $M = \begin{pmatrix} (a|a) & (b|a) & (c|a) \\ (a|b) & (b|b) & (c|b) \\ (a|c) & (b|c) & (c|c) \end{pmatrix}$

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

Correction

1. A cause de la symétrie du produit scalaire, M est une matrice symétrique réelle.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   Classiquement $X^T\,M\,X = \|x_1\,a + x_2\,b + x_3\,c\|^2 \geq 0$.
   M est une matrice symétrique positive donc son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 30 *(Centrale maths 2 2019)*

On considère $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille 3.
Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. On définit la matrice $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, et on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ (resp. $\mu_1 \leq \mu_2$) les valeurs propres de A (resp. $\hat{A}$) rangées par ordre croissant.

1. Écrire une fonction `symetrique()` qui ne prend aucun argument et qui renvoie une matrice aléatoire de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont compris entre 0 et 1.
2. Pour une liste python `L`, la commande `L=sorted(L)` renvoie la liste rangée par ordre croissant. Afficher `[`λ_1`,`λ_2`,`λ_3`]` et `[`μ_1`,`μ_2`]` sur une dizaine d'exemples. Que peut on conjecturer quant à la position de μ_1 et μ_2 par rapport à λ_1, λ_2 et λ_3 ?
   Réponse
   On conjecture :
   $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3$
3. On suppose pour cette question que A est inversible et on note C_1, C_2, C_3 ses colonnes.
   On note B la matrice A^{-1}.

a. Calculer $b_{1,3}C_1 + b_{2,3}C_2 + b_{3,3}C_3$.
b. Exprimer $\det(\hat{A})$ sous la forme d'un déterminant de taille 3 dont les deux premières colonnes sont les colonnes de A. En déduire une expression simple de $b_{3,3}$.

4. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = U^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} U$.
5. On note χ_A et $\chi_{\hat{A}}$ les polynômes caractéristiques de A et de $\hat{A}$. En exprimant le coefficient en bas à droite de $(tI_3 - A)^{-1}$ de deux manières différentes, montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$:
$$\frac{\chi_{\hat{A}}(t)}{\chi_A(t)} = \frac{c_1}{t-\lambda_1} + \frac{c_2}{t-\lambda_2} + \frac{c_3}{t-\lambda_3}$$
6. Démontrer la conjecture émise à la question 2.

Correction

1.
```
def symetrique():
    A=np.zeros((3,3))
    for i in range(3):
        A[i,i]=rd.random()
    for i in range(2):
        for j in range(i+1,3):
            coeff=rd.random()
            A[i,j]=coeff
            A[j,i]=coeff
    return A
```
2.
```
def chapeau(A):
    return A[:2,:2]

A=symetrique()
L=alg.eigvals(A)
L=sorted(L)
print(L)
Achapeau=chapeau(A)
M=alg.eigvals(Achapeau)
M=sorted(M)
print(M)
```
3. (a) $b_{1,3}C_1 + b_{2,3}C_2 + b_{3,3}C_3$ est la dernière colonne de la matrice $AB = I_3$ soit la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b)
$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 1 \end{vmatrix} = \det_{Can}(C_1, C_2, b_{1,3}C_1 + b_{2,3}C_2 + b_{3,3}C_3) \\ &= b_{1,3} \det_{Can}(C_1, C_2, C_1) + b_{2,3} \det_{Can}(C_1, C_2, C_2) + b_{3,3} \det_{Can}(C_1, C_2, C_3) \\ &= b_{3,3} \det(A) \end{aligned}$$

Donc $b_{3,3} = \dfrac{\det(\hat{A})}{\det(A)}$

4. Il suffit d'invoquer le théorème spectral.
5. D'après 3) (et un peu de détails), le coefficient en bas à droite de $(tI_3 - A)^{-1}$ est $\dfrac{\chi_{\hat{A}}(t)}{\chi_A(t)}$.

$$\begin{aligned}(tI_3 - A)^{-1} &= \left(tI_3 - U^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}U\right)^{-1} = \left(U^{-1}\begin{pmatrix}t-\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & t-\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & t-\lambda_3\end{pmatrix}U\right)^{-1}\\ &= U^{-1}\begin{pmatrix}(t-\lambda_1)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & (t-\lambda_2)^{-1} & 0\\ 0 & 0 & (t-\lambda_3)^{-1}\end{pmatrix}U\end{aligned}$$

Les formules du calcul matriciel donnent alors pour e coefficient en bas à droite de $(tI_3 - A)^{-1}$:
$\dfrac{c_1}{t-\lambda_1} + \dfrac{c_2}{t-\lambda_2} + \dfrac{c_3}{t-\lambda_3}$
avec $c_k = u_{k,3}^2 \geq 0$

6. Dans un premier temps, on suppose que les valeurs propres de A sont simples.
   - **Premier cas :** les c_k sont tous strictement positifs
     $\dfrac{\chi_{\hat{A}}}{\chi_A}$, donc $\chi_{\hat{A}}$ changent de signe entre λ_1 et λ_2 et entre λ_2 et λ_3 (regarder les limites)
     On conclut facilement
   - **Deuxième cas** $c_1 = 0$ et les autres sont non nuls.
     Il y a un changement de signe entre λ_2 et λ_3.
     $c_1 = 0$ entraîne $\chi_{\hat{A}}(\lambda_1) = 0$
     On conclut facilement.
     On traite de même les deux autres cas où un seul des c_i est nul.
   - **Troisième cas** $c_1 = c_2 = 0$ et $c_3 \neq 0$
     $\lambda_1 = \mu_1 \leq \lambda_2 = \mu_2 \leq \mu_3$
     On traite de même les deux autres cas où un seul des c_i est non nul.
   - Les c_i ne peuvent pas être tous nuls : la troisième colonne de U serait nulle.

   Reste le cas où A a des valeurs propres multiples.
   Si A a une valeur propre triple alors $A = \lambda I_3$ et $\hat{A} = \lambda I_2$, ce qui permet de conclure facilement.
   Si $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ alors :
   $\dfrac{\chi_{\hat{A}}(t)}{\chi_A(t)} = \dfrac{c_1+c_2}{t-\lambda_1} + \dfrac{c_3}{t-\lambda_3}$
   λ_1 est racine de $\chi_{\hat{A}}$ (sinon on aurait un terme en $\dfrac{1}{(t-\lambda_1)^2}$), elle est double si $c_1 + c_2 = 0$.
   Si $c_3 = 0$ alors λ_3 est racine de $\chi_{\hat{A}}$.
   Si $c_1 + c_2 > 0$ et $c_3 > 0$, on met en évidence un changement de signe.
   On règle de même les autres cas.

Exercice 31 *(X 2018)*

Soient f et g deux projections orthogonales de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique). Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Correction

- On commence par montrer que f et g sont symétriques. Cela a été fait en cours et ne pose pas de problème.
- $(f \circ g)(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Im}\,(f \circ g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ donc $\mathrm{Im}\,(f)$ est stable par $f \circ g$.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in (\mathrm{Im}\, f)^2 \ ((f \circ g)(x)|y) &= (g(x)|f(y)) \text{ car } f \text{ est symétrique} \\
&= (g(x)|y) \text{ car } f \text{ étant un projecteur, } \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f - id) \\
&= (x|g(y)) \text{ car } g \text{ est symétrique} \\
&= (f(x)|g(y)) \text{ car } f \text{ étant un projecteur, } \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f - id) \\
&= (x|(f \circ g)(y)) \text{ car } f \text{ est symétrique}
\end{aligned}$$

  Donc l'endomorphisme de $\mathrm{Im}\,(f)$ induit par $f \circ g$ est symétrique.
  Il existe donc une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ formée de vecteurs propres de $f \circ g$.
- $\forall x \in \mathrm{Ker}\,(g)\ (f \circ g)(x) = 0$.
  Une base de $\mathrm{Ker}\,(g)$ est donc formée de vecteurs propres de $f \circ g$.
- En recollant les morceaux, on obtient une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$ formée de vecteurs propres de $f \circ g$.
  On peut en extraire une base de $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$ formée de vecteurs propres de $f \circ g$.
- On a classiquement : $(\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g))^{\perp} = (\mathrm{Im}\,(f))^{\perp} \cap (\mathrm{Ker}\,(g))^{\perp}$.
  Comme on a affaire à des projecteurs : $(\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g))^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$. D'où :
  $\forall x \in (\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g))^{\perp}\ \ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 0$
  Une base de $(\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g))^{\perp}$ est donc formée de vecteurs propres de $f \circ g$.
  En recollant les morceaux on obtient une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $f \circ g$.

2.3 Endomorphismes et matrices symétriques positifs

Exercice 32 *(X 2016)*

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ (AX|X) > 0$.
Montrer que si X est non nul, $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{(A^{k+1}X|X)}{(A^kX|X)}$ existe et vaut une valeur propre de A.

Correction
A étant symétrique réelle, il existe $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, BON formée de vecteurs propres de A avec $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ où λ_i est la valeur propre de A associée à ϵ_i.
De l'hypothèse
$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ (AX|X) > 0$
on déduit classiquement que les λ_i sont strictement positifs.
Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ ses coordonnées dans la base $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$.
Classiquement :
$\forall k \in \mathbb{N}\ (A^kX|X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k y_i$
X est non nul donc on peut définir $i_0 = \min\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } y_i \neq 0\}$.
On peut ensuite définir $\alpha = \displaystyle\sum_{i \text{ tq } \lambda_i = \lambda_{i_0}} y_i^2 > 0$.
$(A^kX|X) \sim \alpha \lambda_{i_0}^k$.
Donc la limite cherchée existe et vaut λ_{i_0}.

Exercice 33 *(Centrale Maths2 2018)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n la matrice à $n+1$ lignes et $n+1$ colonnes définie par :
$H_n = (c_{i+j})_{0 \leq i,j \leq n}$

1. Montrer que H_n est diagonalisable.
2. Ecrire une fonction retournant H_n.
3. Pour $n = 1$ et $n = 2$ montrer avec rigueur que $\det(H_n) = 1$ et que $\mathrm{Sp}(H_n) \subset \mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer l'équivalence :
   (α) A est symétrique réelle et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   (β) $\exists T \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ tq $A = T^T T$

Correction

1. H_n est symétrique réelle.
2. ```
   from math import factorial
   import numpy as np
   import numpy.linalg as alg


   def c(n):
       return factorial(2*n)/((factorial(n))**2*(n+1))

   def H(n):
       M=np.zeros((n+1,n+1))
       for i in range(n+1):
           M[i,i]=c(2*i)
           for j in range(i+1,n+1):
               a=c(i+j)
               M[i,j]=a
               M[j,i]=a
       return M
   ```
3. - **Cas** $n = 1$
     ```
     print(H(1))
     [[ 1.  1.]
      [ 1.  2.]]
     print(np.poly(H(1)))
     [ 1. -3.  1.]
     ```
     Pas besoin de machine ici pour calculer le déterminant de H_1 et son polynôme caractéristique.
     $\chi_{H_1} = X^2 - \mathrm{tr}\,(H_1)X + \det(H_1) = X^2 - 3X + 1$
     H_1 est symétrique réelle donc ses deux valeurs propres sont réelles. Leur produit vaut 1 et leur somme 3 donc elles sont strictement positives (classique).
   - **Cas** $n = 2$
     ```
     print(H(2))
      [[  1.   1.   2.]
      [  1.   2.   5.]
     ```
     ```

```
 [  2.   5.  14.]]
print(np.poly(H(2)))
[  1. -17.  14.  -1.]
```

Avec le cours et l'énoncé, sans se plonger dans la doc :
$\chi_{H_2} = X^3 - 17X^2 + 14X - 1$
On a "rigoureusement" $\det(H_2) = 1$.
$\chi'_{H_2}(X) = 3X^2 - 34X + 14$

```
print(34**2-4*3*14)
988
```

$\chi'_{H_2}(X)$ a deux racines réelles. Leur produit et leur somme sont strictement positives donc elles sont strictement positives.
χ_{H_2} est donc strictement croissant sur $\mathbb{R}_-$. Comme $\chi_{H_2}(0) = -1$, χ_{H_2} est strictement négatif sur $\mathbb{R}_-$.
Comme H_2 est symétrique réelle, ses trois valeurs propres sont réelles strictement positives.

4. On suppose : A est symétrique réelle et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
$\exists P \in O(n)$ tq $P^TAP = D = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où tous les λ_i sont strictement positifs.
Soit $\Delta = Diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$.
Δ est une matrice diagonale inversible et $\Delta^2 = D$.
$A = PDP^T = P\Delta^2P^T = T^TT$ avec $T = \Delta P^T$
T est inversible comme produit de deux matrices inversibles.

On suppose : $\exists T \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ tq $A = T^TT$
La symétrie de A ne pose pas de problème.
Soit λ une valeur propre (nécessairement réelle) de A et X un vecteur propre associé.
$X^TAX = X^T(\lambda X) = \lambda \|X\|^2$ mais :
$X^TAX = X^TT^TTX = (TX)^T(TX) = \|TX\|^2 > 0$ car T est inversible et X est non nul.