

Sujets classiques

Normes subordonnées

941

1 Définition

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, l'espace vectoriel des vecteurs de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$. La norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'espace des matrices de dimension $n \times n$ sur $\mathbb{K}$, notée $\|\cdot\|$, est définie par :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et x est un vecteur de $\mathbb{K}^n$.

L'existence de $\|A\|$ se justifie ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\|$$

L'application $\begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \\ y \mapsto \|Ay\| \end{cases}$ est continue et $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tq } \|x\| = 1\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{K}^n$ donc :

$$\exists y_0 \in \mathcal{S} \text{ tq } \forall y \in \mathcal{S} \quad \|Ay\| \leq \|Ay_0\|$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|Ay_0\| \text{ avec égalité pour } x = y_0$$

Donc $\|A\|$ est bien définie et c'est en fait un maximum.

On montre ensuite que $\|\cdot\|$ est bien une norme :

- $\forall (\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} \right) = \sup_{x \neq 0} \left(|\lambda| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right) = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$ car $|\lambda| \in \mathbb{R}_+$

Donc :

$$\forall (\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad Ax = 0$$

En prenant pour x les vecteurs de la base canonique, on montre que tous les coefficients de A sont nuls.

- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\| + \|B\| \text{ indépendant de } x$$

$$\text{On en déduit } \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

2 Propriétés

1. **Sous-multiplicativité** : Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Démonstration

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

Par définition de $\|A\|$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

et cette inégalité est triviale si $x = 0$.

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\| \text{ indépendant de } x.$$

$$\text{Donc } \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

2. **Norme de l'identité** : Pour la matrice identité I_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\|I_n\| = 1$$

3. **Compatibilité avec les normes vectorielles** :

$$\forall (A, x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

3 Exemples de Normes Subordonnées

- **Norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_1$** :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Cf TD Analyse 2 chapitre 1 exercice 3

- **Norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$** :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Cf TD Analyse 2 chapitre 1 exercice 3

- **Norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$** :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

où ρ désigne le rayon spectral.

$A^T A$ est symétrique réelle positive :

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad X^T A^T A X = (AX)^T (AX) = \|AX\|^2 \geq 0$$

Donc il existe $P \in O(n)$ et $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ des réels positifs tels que $A^T A = P D P^T$ avec

$$D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned} X^T A^T A X &= X^T (P D P^T) X = (X^T P) D (P^T X) \\ &= (P^T X)^T D (P^T X) \end{aligned}$$

$$\text{On pose } Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned} \|AX\|^2 &= Y^T D Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_n y_i^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda_n Y^T Y \\ &= \lambda_n (P^T X)^T P^T X = \lambda_n X^T P P^T X = \lambda_n X^T I_n X \\ &\leq \lambda_n \|X\|^2 \end{aligned}$$

Donc :

$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \lambda_n$ avec égalité pour X vecteur propre de $A^T A$ associé à la valeur propre λ_n

$$\text{Donc } \|A\| \leq \lambda_n = \rho(A^T A)$$

Les normes subordonnées sont essentielles pour analyser la stabilité et la convergence des méthodes numériques, notamment dans la résolution des systèmes linéaires et le calcul des valeurs propres.