Présentation des Matrices de Gram

1 Introduction

Les matrices de Gram jouent un rôle crucial en algèbre linéaire et en géométrie. Elles sont utilisées pour étudier les propriétés des ensembles de vecteurs dans un espace vectoriel.

2 Définition

Soit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un ensemble de vecteurs dans un espace vectoriel V avec un produit scalaire. La matrice de Gram G associée à cet ensemble est définie par:

$$G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \end{pmatrix}$$

où $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$ représente le produit scalaire entre les vecteurs $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{v}_j$.
Le coefficient situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est donc $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$.

3 Propriétés

- La matrice de Gram est symétrique.
  En effet :
  $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; G_{j,i} = \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = G_{i,j}$
  par symétrie du produit scalaire.

- La matrice de Gram est positive dans tous les cas :

$$\begin{aligned}
\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T G X &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} G_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle x_i x_j \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j \right\rangle \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i \right\|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

- Elle est définie positive si les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont linéairement indépendants.
  En effet dans ce cas si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i$ est non nul et $X^T G X > 0$.
  Les valeurs propres de G sont alors réelles strictement positives et le déterminant de G qui est le produit des valeurs propres de G comptées avec leurs multiplicités est strictement positif.
  Par contre, si les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont liés, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $X^T G X = 0$
  On a vu en cours que $\lambda \|X\|^2 \leq X^T G X$ où λ est la plus petite valeur propre de G donc $\lambda \leq 0$.
  G étant symétrique positive, ses valeurs propres sont positives et on en déduit que $\lambda = 0$
  0 est donc valeur propre de G et G n'est pas inversible.

- Le déterminant de la matrice de Gram est nul si et seulement si les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont linéairement dépendants.

4 Applications

Les matrices de Gram sont utilisées dans divers domaines, notamment:

- La théorie des formes quadratiques.

- L'analyse numérique pour les méthodes de moindres carrés.

- La géométrie des espaces de Hilbert.

- On suppose que les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont linéairement indépendants.
  Soit x un vecteur de E.
  x se décompose de manière unique en $x = y + z$ avec $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i v_i \in$

$\mathbf{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ et z orthogonal à $\mathbf{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$

$$\begin{aligned}
& \det\left(G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, x\right) \\
= & \begin{vmatrix}
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle & \langle \mathbf{v}_1, y \rangle \\
\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle & \langle \mathbf{v}_2, y \rangle \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle & \langle \mathbf{v}_n, y \rangle \\
\langle y, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle y, \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle y, \mathbf{v}_n \rangle & \langle y, y \rangle + \|z\|^2
\end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix}
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle & 0 \\
\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle & 0 \\
\langle y, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle y, \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle y, \mathbf{v}_n \rangle & \|z\|^2
\end{vmatrix} \quad C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} C_j \\
= & \|z\|^2 \det\left(G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\right) \\
= & d\left(x, \mathbf{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)\right)^2 \det\left(G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\right)
\end{aligned}$$