

Révisions 2025
Algèbre générale
19 mai 2025

941

Exercice 1 (*CCP 2023*)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Résoudre $z^n = e^{i\pi/3}$.
2. Résoudre $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$

Exercice 2 (*CCP 2023*)

1. Trouver tous les nombres complexes z tels que $|z| = |z+1| = 1$.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.
Montrer que a, b et c sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice 3 (*Centrale 2023*)

1. Soit A et $B \in \mathbb{R}[X]$ et $P = A^2 + B^2$.
 - (a) Montrer que $P = 0$ ou bien que P est de degré pair et de coefficient dominant strictement positif.
 - (b) Les polynômes $P_1 = X^4 - X^2 + 1$ et $P_2 = X^4 - 1$ peuvent-ils s'écrire sous cette forme ?
 - (c) Que dire de la multiplicité des racines réelles de P ?
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
 $\forall x \in \mathbb{R} \ P(x) \geq 0$
Montrer qu'il existe A et $B \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 4 (*Ens 2023*)

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Montrer que tout entier $N \geq 1$ s'écrit de manière unique $N = F_{n_1} + \dots + F_{n_k}$ avec $2 \leq n_1$ et pour tout i compris entre 1 et $k-1$, $n_{i+1} - n_i > 1$.

Exercice 5 (*X 2023*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n .

Montrer :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\tau(n)}{n^u} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 6 (*X 2023*)

Soit $P(X) = (X + 1)^{6n} + X^{6n} + 1$.

Soit $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } \Re(z) = -\frac{1}{2} \right\}$.

Soit $B = \mathcal{C}(0, 1)$ ie le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Soit $C = \mathcal{C}(-1, 1)$ ie le cercle de centre -1 et de rayon 1.

Montrer que P admet exactement $2n$ racines deux à deux distinctes dans chacune de ces trois parties.