Révisions 2025
Algèbre générale
19 mai 2025

941

Exercice 1 *(CCP 2023)*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Résoudre $z^n = \mathrm{e}^{i\pi/3}$.
2. Résoudre $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$

Correction

1. C'est du cours de Sup (racines n-ième d'un nombre complexe).
   $z = \exp\left(\dfrac{i\pi}{3n} + \dfrac{2ik\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq n-1$.
   Dans la suite, on note $z_k = \exp\left(\dfrac{i\pi}{3n} + \dfrac{2ik\pi}{n}\right)$
2. $z = 1$ et $z = -1$ ne sont pas solutions.
   Soit z un nombre complexe différent de 1 et de -1.

$$\begin{aligned}
z \text{ solution} &\iff Z + \frac{1}{Z} = 1 \text{ en posant } Z = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \\
&\iff Z^2 - Z + 1 = 0 \\
&\iff Z = \mathrm{e}^{i\pi/3} \text{ ou } Z = \mathrm{e}^{-i\pi/3} \\
&\iff \frac{z+1}{z-1} = z_k \text{ ou } \frac{z+1}{z-1} = \overline{z_k} = \frac{1}{z_k} \\
&\iff z(1 - z_k) = -1 - z_k \text{ ou } (z_k - 1)z = -1 - z_k \\
&\iff z = \pm\frac{1+z_k}{z_k - 1} \\
&\iff z = \pm i \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{6n} + \frac{k\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2 *(CCP 2023)*

1. Trouver tous les nombres complexes z tels que $|z| = |z+1| = 1$.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.
   Montrer que a, b et c sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Correction

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   On note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire.

$$\begin{aligned}(|z| = |z+1| = 1) &\iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x+1)^2+y^2 = x^2+y^2+2x+1 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+1=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \\ &\iff z \in \{j; j^2\}\end{aligned}$$

2. Supposons que a, b et c soient les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.
   Si ce triangle est réduit à un point alors $a=b=c$ et $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca = 3a^2$.
   Si le triangle n'est pas réduit à un point $|b-a| = |c-b| = |a-c| = L \in \mathbb{R}_+^*$.
   On en déduit :
   $\left|\dfrac{b-a}{a-c}\right| = \left|\dfrac{c-b}{a-c}\right| = 1$
   Mais $\dfrac{b-c}{a-c} = \dfrac{b-a+a-c}{a-c} = 1 + \dfrac{b-a}{a-c}$ donc d'après la première question :
   $\dfrac{b-a}{a-c} = j$ ou j^2.
   Donc $\dfrac{b-a}{a-c} + \dfrac{(b-a)^2}{(a-c)^2} = j + j^2$ ou $j^2 + j^4 = j^2 + j = -1$
   Donc $(a-c)(b-a) + (b-a)^2 + (a-c)^2 = 0$
   Donc $ab - a^2 - cb + ac + b^2 - 2ab + a^2 + a^2 - 2ac + c^2 = 0$
   D'où $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 0$

   Réciproquement, on suppose $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$.
   On en déduit :

$$\begin{aligned}(a-c)(b-a)+(b-a)^2+(a-c)^2 &= (b-a+a-c)^2-(a-c)(b-a) \\ &= b^2-2bc+c^2-ab+a^2+bc-ac \\ &= a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 0\end{aligned}$$

   Si $a=c$ alors il reste $(b-a)^2 = 0$ donc $a=b=c$ et le triangle est équilatéral (mais dégénéré).
   Si $a \neq c$ alors $\left(\dfrac{b-a}{a-c}\right)^2 + \dfrac{b-a}{a-c} + 1$.
   Les racines du polynôme X^2+X+1 sont j et j^2 donc $\dfrac{b-a}{a-c} = j$ ou j^2.
   D'après la première question, $\left|\dfrac{b-a}{a-c}\right| = \left|1 + \dfrac{b-a}{a-c}\right| = 1$.
   On en déduit, en multipliant par $|a-c|$:
   $|b-a| = |b-c| = |a-c|$
   et le triangle est bien équilatéral.

Exercice 3 *(Centrale 2023)*

1. Soit A et $B \in \mathbb{R}[X]$ et $P = A^2 + B^2$.
   (a) Montrer que $P = 0$ ou bien que P est de degré pair et de coefficient dominant strictement positif.
   (b) Les polynômes $P_1 = X^4 - X^2 + 1$ et $P_2 = X^4 - 1$ peuvent-ils s'écrire sous cette forme ?
   (c) Que dire de la multiplicité des racines réelles de P ?
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \geq 0$
   Montrer qu'il existe A et $B \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Correction

1. (a) $P = 0 = 0^2 + 0^2$ est bien un cas possible.
   On suppose P non nul.
   Soit d son degré et c son coefficient dominant.
   $P(x) \sim_{+\infty} cx^d$ avec $P(x) = A(x)^2 + B(x)^2 \geq 0$ donc $c > 0$.
   $P(x) \sim_{-\infty} cx^d$ avec $P(x) = A(x)^2 + B(x)^2 \geq 0$ et $c > 0$ donc d est pair.
   (b) $P_1 = X^4 - 2X^2 + 1 + X^2 = A^2 + B^2$ avec $A = X^2 - 1$ et $B = X$.
   On peut aussi écrire en utilisant la forme canonique :
   $P_1 = \left(X^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = \left(X^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
   Par contre P_2 ne peut s'écrire sous cette forme : on aurait $-1 = P_2(0) = A(0)^2 + B(0)^2$ avec $A(0)$ et $B(0)$ réels.
   (c) Si P s'annule en $r \in \mathbb{R}$, P ne change pas de signe donc la multiplicité de r est paire.
2. L'examinateur aurait du ajouter une question.
   Soient P_1 et $P_2 \in \mathbb{R}[X]$.
   On suppose :
   $\exists (A_1, B_1) \in \mathbb{R}[X]^2$ tq $P_1 = A_1^2 + B_1^2$
   $\exists (A_2, B_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ tq $P_2 = A_2^2 + B_2^2$

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= (A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2) \\ &= (A_1 + iB_1)(A_1 - iB_1)(A_2 + iB_2)(A_2 - iB_2) \\ &= (A_1 + iB_1)(A_2 + iB_2)(A_1 - iB_1)(A_2 - iB_2) \\ &= (A_1A_2 - B_1B_2 + i(A_1B_2 + A_2B_1))\,(A_1A_2 - B_1B_2 - i(A_1B_2 + A_2B_1)) \\ &= (A_1A_2 - B_1B_2)^2 + (A_1B_2 + A_2B_1)^2 \end{aligned}$$

   Donc $P_1P_2 \in A_3^2 + B_3^2$ avec A_3 et $B_3 \in \mathbb{R}[X]$.

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \geq 0$
   La décomposition en facteurs irréductibles de P s'écrit :
   $P = C \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{\alpha_k} \prod_{l=1}^{q} (X^2 + b_lX + c_l)^{\gamma_l}$
   avec les a_k réels deux à deux distincts, les $(b_l, c_l) \in \mathbb{R}^2$ deux à deux distincts avec $b_l^2 - 4c_l < 0$, les α_k et les γ_l entiers strictement positifs.
   C est le coefficient dominant de P. P étant positif, $C > 0$. Le polynôme constant C s'écrit sous la forme $C = \sqrt{C}^2 + 0^2$.
   P étant de signe constant, α_k est pair : $\alpha_k = 2\beta_k$ avec $\beta_k \in \mathbb{N}^*$.

Donc $(X-a_k)^{\alpha_k} = \left((X-a_k)^{\beta_k}\right)^2 + 0^2$.

$X^2+b_lX+c_l = \left(X+\dfrac{b_l}{2}\right)^2 - \dfrac{b_l^2}{4} + c_l = \left(X+\dfrac{b_l}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{4c_l-b_l^2}}{2}\right)^2$ $(4c_l - b_l^2 > 0)$.

On conclut avec la remarque initiale.

Exercice 4 *(Ens 2023)*

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Montrer que tout entier $N \geq 1$ s'écrit de manière unique $N = F_{n_1} + \cdots + F_{n_k}$ avec $2 \leq n_1$ et pour tout i comrpis entre 1 et $k-1$, $n_{i+1} - n_i > 1$.

Correction
$F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$...
$1 = F_1 = F_2$ sont les seules façons de décomposer 1 en somme de nombres de Fibonacci mais la première ne satisfait pas aux conditions de l'énoncé.
$2 = F_3 = F_1 + F_2$ sont les seules façons de décomposer 2 en somme de nombres de Fibonacci mais la deuxième ne satisfait pas aux conditions de l'énoncé.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(N)$: tout entier compris entre 1 et N a une et une seule écriture du type de celle de l'énoncé.
$\mathcal{P}(2)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(N)$ vraie.
Soit $n = \max\left(\{k \in [\![2;+\infty]\!] \text{ tq } F_k \leq N+1\}\right)$.
L'existence de ce maximum doit être justifiée. C'est le maximum d'un ensemble non vide (il contient $k=2$) et fini (on montre que $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ en calculant F_n par la méthode habituelle).
Si $F_n = N+1$, on a une décomposition de $N+1$ (satisfaisant aux conditions de l'énoncé).
Si $F_n < N+1$ alors d'après l'hypothèse de récurrence, $N+1-F_n$ a une décomposition $N+1-F_n = F_{n_1} + \cdots + F_{n_k}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.
Il suffit de montrer que $n - n_k > 1$ pour exhiber une décomposition de $N+1$.
$F_{n+1} > N+1$ donc $N+1-F_n < F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$
$N+1-F_n = F_{n_1} + \cdots + F_{n_k} \geq F_{n_k}$
Donc $F_{n-1} > F_{n_k}$.
On montre facilement que la suite (F_n) est croissante donc $n-1 > n_k$.
Comme ce sont des entiers $n - n_k \geq 2$.
On a donc montré l'existence d'une décomposition de $N+1$.
Considérons une décomposition $N+1 = F_{m_1} + \cdots + F_{m_l}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.
$m_l \geq 2$ et $F_{m_l} \leq N+1$
$N+1 = F_{m_1} + \cdots + F_{m_l} < F_{m_2-1} + F_{m_2} + \cdots + F_{m_l}$ car $m_1 < m_2 - 1$ et $(F_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.
Donc $N+1 < F_{m_2+1} + F_{m_3} + \cdots + F_{m_l}$ avec $m_2 + 1 \leq m_3 - 1$
Donc $N+1 < F_{m_3-1} + F_{m_3} + \cdots + F_{m_l} = F_{m_3+1} + F_{m_4} + \cdots + F_{m_l}$ avec $m_3 + 1 \leq m_4 - 1$
En itérant le procédé, on aboutit à $N+1 < F_{m_l+1}$.
Donc $m_l = n$ et $F_{m_1} + \cdots + F_{m_{l-1}}$ est une décomposition de $N+1-F_n = F_{n_1} + \cdots + F_{n_k}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $m_1 = n_1$... et il y a unicité de la décomposition de $N+1$.

Exercice 5 *(X 2023)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n.
Montrer :
$\forall u \in \mathbb{R}_+^* \ \dfrac{\tau(n)}{n^u} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Correction
$\forall n \geq 2 \ 2 \leq \tau(n) \leq n$
Donc si $u > 1$, on a :
$\forall n \geq 2 \ 0 \leq \dfrac{\tau(n)}{n^u} \leq n^{1-u} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $\dfrac{\tau(n)}{n^u} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
La majoration $\tau(n) \leq n$ est trop grossière.
On peut regrouper les diviseurs de n 2 par 2.
Si on a $n = d_1 d_2$ avec $d_1 \leq d_2$ alors $n \geq d_1^2$ et $d_1 \leq \sqrt{n}$.
Si n n'est pas un carré parfait, la liste des diviseurs de n est de la forme $\left(d, \dfrac{n}{d}\right)$ avec d qui décrit une partie de $[\![1; \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!]$.
On a donc $\tau(n) \leq 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq 2\sqrt{n}$.
Si n est un carré parfait : $n = p^2$ alors la liste des diviseurs de n différents de p est de la forme $\left(d, \dfrac{n}{d}\right)$ avec d qui décrit une partie de $[\![1; p-1]\!]$.
On a donc $\tau(n) \leq 2(p-1) + 1 = 2p - 1 \leq 2p = 2\sqrt{n}$.
Par conséquent, si $u > \dfrac{1}{2}$:
$\forall n \geq 2 \ 0 \leq \dfrac{\tau(n)}{n^u} \leq 2n^{1/2-u} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $\dfrac{\tau(n)}{n^u} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Cette approche est limitée car on n'obtient pas facilement de meilleure majoration de $\tau(n)$.
On peut remarquer qu'il suffit de montrer que pour tout $u > 0$, la suite $\left(\dfrac{\tau(n)}{n^u}\right)$ est bornée.
En effet si c'est le cas :
$\forall u > 0 \ \dfrac{\tau(n)}{n^u} = \dfrac{1}{n^{u/2}} \dfrac{\tau(n)}{n^{u/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ comme produit d'un facteur qui tend vers 0 et d'un facteur borné.
On fixe désormais $u > 0$.
Si la décomposition en facteurs premiers de n est $n = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ (les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_k des entiers strictement positifs) alors les diviseurs de n sont les nombres $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} p_k^{\beta_k}$ avec $0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.
Donc $\tau(n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (\alpha_k + 1)$ et $\dfrac{\tau(n)}{n^u} = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \dfrac{\alpha_k + 1}{p^{u\alpha_k}}$.
$\forall p \in \mathbb{N}^* \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^* \ p^{u\alpha} = \mathrm{e}^{u\alpha \ln(p)} \geq 1 + u\alpha \ln(p)$ par convexité de la fonction exponentielle.
$u \ln p \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ car $u > 0$ donc :
$\exists p_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall p \in \mathbb{N}^* \ u \ln(p) \geq 1$
Si p est un nombre premier supérieur ou égal à p_0 alors pour tout $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\alpha_k + 1}{p^{u\alpha_k}} \leq 1$
Si on note $\{p_1, \ldots, p_N\}$ l'ensemble des nombres premiers strictement inférieurs à p_0 alors, on

peut écrire pour tout $n \geq 2$:
$\dfrac{\tau(n)}{n^u} \leq \displaystyle\prod_{k=1}^{N} \dfrac{\alpha_k(n)+1}{p_k^{u\alpha_k(n)}}$ où $\alpha_k(n) \in \mathbb{N}$
Soit $k \in [\![1;N]\!]$.
$\dfrac{1+\alpha}{p_k^{u\alpha}} = \exp\left(-u\ln(p_k)\alpha + \ln(1+\alpha)\right) \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$ car $-u\ln(p_k) < 0$
La suite $\left(\dfrac{1+\alpha}{p_k^{u\alpha}}\right)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc elle est bornée :
$\exists M_k \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1+\alpha}{p_k^{u\alpha}} \leq M_k$
Finalement :
$\forall n \geq 2$ $\dfrac{\tau(n)}{n^u} \leq \displaystyle\prod_{k=1}^{N} M_k$

Exercice 6 *(X 2023)*

Soit $P(X) = (X+1)^{6n} + X^{6n} + 1$.
Soit $A = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \Re e(z) = -\dfrac{1}{2}\right\}$.
Soit $B = \mathcal{C}(0,1)$ ie le cercle de centre 0 et de rayon 1.
Soit $C = \mathcal{C}(-1,1)$ ie le cercle de centre -1 et de rayon 1.
Montrer que P admet exactement $2n$ racines deux à deux distinctes dans chacune de ces trois parties.

Correction
P est de degré $6n$ (et de coefficient dominant 2) donc P a au plus $6n$ racines.
Si on montre que P a au moins $2n$ racines dans chacune de ces trois parties et si elles ne sont pas dans l'intersection de deux de ces parties on aura terminé.
$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{j^2, j\}$.
$P(j) = (-j^2)^{6n} + j^{6n} + 1 = 3$
P étant à coefficients réels, par conjugaison $P(j^2) = 3$
Il suffit donc de montrer que P a aumoins deux racines deux à deux distinctes dans A, dans B, dans C.
On va commencer par B dont les éléments sont de la forme $\mathrm{e}^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}
P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) &= \left(1+\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{6n} + \mathrm{e}^{6in\theta} + 1 \\
&= \left(\mathrm{e}^{i\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-i\theta/2} + \mathrm{e}^{i\theta/2}\right)\right)^{6n} + \mathrm{e}^{6in\theta} + 1 \\
&= \mathrm{e}^{3in\theta}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{6n} + \mathrm{e}^{6in\theta} + 1 \\
&= \mathrm{e}^{3in\theta}\left(\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{6n} + \mathrm{e}^{3in\theta} + \mathrm{e}^{-3in\theta}\right) \\
&= \mathrm{e}^{3in\theta}\left(\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{6n} + 2\cos(3n\theta)\right)
\end{aligned}$$

Pour $\theta \in [0; 2\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \leq 1 &\iff \frac{\pi}{3} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{2\pi}{3} \\ &\iff \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Si $\theta = \dfrac{k\pi}{3n}$ est compris entre $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ alors :
$\left(2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)^{6n} + 2\cos(3n\theta) = \left(2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)^{6n} + 2(-1)^k$ est du signe strict de $(-1)^k$.

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{3} \leq \frac{k\pi}{3n} \leq \frac{4\pi}{3} &\iff 2 \leq \frac{k}{n} \leq 4 \\ &\iff 2n \leq k \leq 4n \end{aligned}$$

Cela donne $2n+1$ valeurs et donc $2n$ changements de signe strict. Par le théorème des valeurs intermédiaires, P a au moins $2n$ racines deux à deux distinctes dans B.
Les élèments de C peuvent s'écrire $-1 - \mathrm{e}^{i\theta}$.
$\forall \theta \in \mathbb{R}\ P\left(-1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right) = \left(-\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{6n} + \left(-1 - \mathrm{e}^{i\theta}\right)^{6n} + 1 = P\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)$
On déduit donc de ce qui précède que P a au moins $2n$ racines deux à deux distinctes dans C.
Les élèments de A peuvent s'écrire $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} i \operatorname{cotan}(\theta) = -\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2\cos(\theta)}$, $0 < \theta < \pi$.

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2\cos(\theta)}\right) &= \frac{1}{(2\cos(\theta))^{6n}}\left(\left(2\cos(\theta) - \mathrm{e}^{i\theta}\right)^{6n} + \mathrm{e}^{6n\theta} + (2\cos(\theta))^{6n}\right) \\ &= \frac{1}{(2\cos(\theta))^{6n}}\left(\mathrm{e}^{-6n\theta} + \mathrm{e}^{6n\theta} + (2\cos(\theta))^{6n}\right) \\ &= \frac{1}{(2\cos(\theta))^{6n}}\left(2\cos(6n\theta) + (2\cos(\theta))^{6n}\right) \\ &= \frac{1}{(2\cos(\theta))^{6n}}\left(2\cos(3n(2\theta)) + \left(2\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)^{6n}\right) \end{aligned}$$

avec $0 < 2\theta < 2\pi$, ce qui nous ramène à la discussion précédente.
On en déduit que P a au moins $2n$ racines deux à deux distinctes dans A.