

Révisions 2025  
Algèbre linéaire de Sup  
15 mai 2025

941

**Exercice 1** (*Mines 2023*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $F$  un sous-espace de  $E$ .

1. Montrer :

$$\dim(F) = n - 1 \iff \exists \phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \setminus \{0\} \text{ tq } F = \ker(\phi)$$

$F$  s'appelle un hyperplan.

2. Montrer que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  contient au moins une matrice inversible.

**Exercice 2** (*Mines 2023*)

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket P(k) = \frac{1}{k^2}$$

2. Déterminer  $P(n+2)$ .

**Exercice 3** (*Mines 2023*)

Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$  et  $A^2B = A$ .

Montrer que  $B^2A = B$ .

**Exercice 4** (*Mines 2023*)

Soient  $M$  et  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $n$  impair telles que  $MN = 0$  et  $M + M^T$  est inversible.

Montrer que  $N + N^T$  n'est pas inversible.