Révisions 2025
Algèbre linéaire de Sup
15 mai 2025

941

Exercice 1 *(Mines 2023)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de E.

1. Montrer :
   $\dim(F) = n-1 \Longleftrightarrow \exists \phi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tq $F = \ker(\phi)$
   F s'appelle un hyperplan.
2. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible.

Correction

1. - On suppose que F est de dimension $n-1$.
     Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de F.
     C'est une famille libre de E donc on peut la compléter en $(e_1, \ldots, e_n)$ base de E.
     Soit $\phi \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_n \end{cases}$.
     ϕ est une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{R}$ et son noyau est F.
   - Soit ϕ une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{R}$ et F son noyau.
     $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Or $\mathbb{R}$ est de dimension 1 donc le rang de ϕ vaut 0 ou 1. Mais ϕ est non nulle donc son rang est égal à 1.
     Par la formule du rang, F est de dimension $n-1$.
2. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Il existe $\phi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tq $H = \ker(\phi)$
   On note $(E_{i,j})_{(i,j)\in [\![1;n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \phi(M) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\phi(E_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}a_{i,j} \text{ en posant } a_{i,j} = \phi(E_{i,j})
\end{aligned}$$

   En particulier on a pour $k \neq l$, $I_n + tE_{k,l}$ qui est inversible (c'est une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux valent 1) et :
   $\phi(I_n + tE_{k,l}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + ta_{k,l}$

Donc si il existe k et l distincts tels que $a_{k,l} \neq 0$, l'hyperplan H contient une matrice de la forme $I_n + tE_{k,l}$ donc contient une matrice inversible.
Si $a_{k,l} = 0$ pour tous k et l distincts alors H contient toute matrice de diagonale nulle. Il suffit d'exhiber une matrice inversible de diagonale nulle.
La matrice $\sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + E_{1,n}$ convient.

Exercice 2 *(Mines 2023)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que : $\forall k \in [\![1; n+1]\!]\ P(k) = \dfrac{1}{k^2}$
2. Déterminer $P(n+2)$.

Correction

1. C'est une simple application du théorème d'interpolation de Lagrange vu en cours.
2. • **Première méthode**
   D'après le cours :
   $$P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \frac{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n+1} (X-l)}{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n+1} (k-l)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
P(n+2) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \frac{(n+1)!}{(n+2-k)\times(k-1)(k-2)\ldots 1\times(-1)\ldots(-(n+1-k))} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \frac{(n+1)!}{(n+2-k)\times k!\times(-1)^{n+1-k}(n+1-k)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n+2}{k} \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \int_0^1 \frac{1}{-t} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} (-t)^k\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+2}-(1-t)^{n+2}}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n+2} \int_0^1 t^{n+1} dt + \frac{(-1)^n}{n+2} \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{n+2}}{1-(1-t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{(-1)^n}{n+2} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n+1} (1-t)^k\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\int_0^1 (1-t)^k\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

- **Deuxième méthode**
  $P - \frac{1}{X^2} = \frac{X^2P-1}{X^2}$ donc le polynôme X^2P-1 s'annule en $1, 2, \ldots, n+1$.
  Donc le polynôme $(X-1)(X-2)\ldots(X-n-1)$, qui est de degré $n+1$, divise le polynôme X^2P-1 qui est de degré au plus $n+2$.
  Donc $X^2P-1 = (aX+b)(X-1)\ldots(X-n-1)$
  Evalué en 0 cela donne $-1 = (-1)^{n+1}(n+1)!b$ donc :
  $b = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$
  Si on dérive, on obtient :
  $$2XP + X^2P' = a(X-1)\ldots(X-n-1) + (aX+b)\sum_{k=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(X-l)\right)$$
  Evalué en 0 cela donne :
  $0 = (-1)^{n+1}(n+1)!a + b\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{-k}$

On en déduit :
$a = b\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$
Donc :
$X^2P - 1 = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\left(X\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + 1\right)(X-1)\dots(X-n-1)$
D'où :
$(n+2)^2P(n+2) - 1 = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\left((n+2)\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + 1\right)(n+1)!$
Donc $P(n+2) = \dfrac{1}{(n+2)^2} + \dfrac{(-1)^n}{n+2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k}$

Exercice 3 *(Mines 2023)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ et $A^2B = A$.
Montrer que $B^2A = B$.

Correction
Cet exercice a été donné à l'X en 2021 avec 3 questions.
$A^2B = A$ donc $A(AB - I_n) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(AB - I_n) \subset \mathrm{Ker}\,(A)$ qui a la même dimension que $\mathrm{Ker}\,(B)$ (formule du rang).
Mais si $X \in \mathrm{Ker}\,(B)$ alors $AX = A^2BX = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}\,(A)$.
On a donc $\mathrm{Ker}\,(B) \subset \mathrm{Ker}\,(A)$ puis $\mathrm{Ker}\,(B) = \mathrm{Ker}\,(A)$ avec les dimensions.
Donc $\mathrm{Im}\,(AB - I_n) \subset \mathrm{Ker}\,(B)$ et $BAB - B = 0$
En multipliant par A à gauche, on obtient $ABAB = AB$: AB est un projecteur.
$\mathrm{Im}\,(AB - I_n)$ est donc égal au noyau de AB et $\mathrm{Ker}\,(AB) \subset \mathrm{Ker}\,(A)$.
Mais $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B) \subset \mathrm{Ker}\,(AB)$ donc $\mathrm{Ker}\,(AB) = \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B)$.
On revient à $BAB = B$ et on multiplie par A à droite. On obtient $BABA = BA$ donc BA est un projecteur.
Mais alors :
$\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{tr}\,(BA) = \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{rg}(AB) = n - \dim(\mathrm{Ker}\,(AB)) = n - \dim(\mathrm{Ker}\,(B)) = \mathrm{rg}(B)$.
Donc avec la formule du rang : $\dim(\mathrm{Ker}\,(BA)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(B)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(A))$ avec $\mathrm{Ker}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\,(BA)$.
On en déduit :
$\mathrm{Im}\,(BA - I_n) = \mathrm{Ker}\,(BA) = \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B)$
puis $B(BA - I_n) = 0$ ce qui conduit à $B^2A = B$.

Exercice 4 *(Mines 2023)*

Soient M et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n impair telles que $MN = 0$ et $M + M^T$ est inversible.
Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

Correction
$M + M^T$ est inversible donc $n = \mathrm{rg}\left(M + M^T\right)$.
$\forall X \in \mathbb{R}^n\ \left(M + M^T\right)X = MX + M^TX \in \mathrm{Im}\,(M) + \mathrm{Im}\,\left(M^T\right)$
Donc $\mathrm{Im}\,\left(M + M^T\right) \subset \mathrm{Im}\,(M) + \mathrm{Im}\,\left(M^T\right)$ et en prenant les dimensions :
$n = \mathrm{rg}\left(M + M^T\right) \leq \mathrm{rg}(M) + \mathrm{rg}\left(M^T\right) - \dim\left(\mathrm{Im}\,(M) \cap \mathrm{Im}\,\left(M^T\right)\right) \leq \mathrm{rg}(M) + \mathrm{rg}\left(M^T\right) =$

$2\,\mathrm{rg}(M)$
En d'autres termes : $\mathrm{rg}(M) \geq \dfrac{n}{2}$.
Mais $MN = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(N) \subset \mathrm{Ker}\,(M)$ et en prenant les dimensions :
$\mathrm{rg}(N) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}\,(M)\right) = n - \mathrm{rg}(M) \leq n - \dfrac{n}{2} = \dfrac{n}{2}$
Mais n est impair donc $\dfrac{n}{2}$ n'est pas entier.
On en déduit $\mathrm{rg}(N) < \dfrac{n}{2}$.
On a alors $\mathrm{rg}\left(N + N^T\right) \leq \mathrm{rg}(N) + \mathrm{rg}\left(N^T\right) = 2\,\mathrm{rg}(N) < n$ et $N + N^T$ n'est pas inversible.