Révisions 2025
Analyse de Sup
19 mai 2025

941

Exercice 1 *(Mines 2023)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) + \sin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2 *(Centrale 2023)*

Soit $f \in \mathcal{C}^3([0;1], \mathbb{R})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n(f) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. (a) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ et $t \in \left[\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\right]$.
   Montrer :
   $$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3$$
   avec M indépendant de k et de t.

   (b) En déduire :
   $$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 3 *(CCP 2024)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : x\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{1/2} = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante.
3. Montrer que la suite (x_n) converge et donner sa limite.

Exercice 4 *(Mines 2023)*

Pour tout $n \geq 3$, on pose $P_n = X^n - nX + 1$.
Montrer que P_n admet deux racines positives. On les note a_n et b_n avec $a_n < b_n$.
Donner les limites de (a_n) et de (b_n).
Donner un équivalent de a_n et de b_n.

Exercice 5 *(Mines 2024)*

Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$

Exercice 6 *(X 2013)*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On suppose que f est bornée et que f'' est positive.
Montrer que f est constante.

Exercice 7 *(Mines 2023)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.
Montrer qu'il existe deux réels A et B indépendants de f tels que :
$\sup_{\mathbb{R}} (|f|) \leq A \int_0^{2\pi} |f| + B \int_0^{2\pi} |f'|$

Exercice 8 *(Mines 2023)*

1. Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ avec $g \geq 0$.
   Montrer :
   $\exists c \in [a;b]$ tq $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a;b],\mathbb{R})$ avec $f' \geq 0$ et $\phi \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$.
   Montrer :
   $\exists c \in [a;b]$ tq $\int_a^b f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c \phi(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b \phi(t)\,\mathrm{d}t$
3. ?

Exercice 9 *(X 2023)*

Soit $C = 0,123456789101112131415.....$
Montrer que C est irrationnel.

Exercice 10 *(CCP 2023)*

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$(*) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. Résoudre $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \ f''(x) = -\omega^2 f(x) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$.
2. Résoudre $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \ f''(x) = \omega^2 f(x) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$.
3. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique vérifie $(*)$, en montrant au préalable :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
4. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(*)$.
   Montrer que $f(0) \in \{0;1\}$ et que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
   Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R} \ f''(x) = f''(0)f(x)$.
5. Conclure.