Révisions 2025
Analyse de Sup
19 mai 2025

941

Exercice 1 *(Mines 2023)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) + \sin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) = \frac{1}{2} \\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Exercice 2 *(Centrale 2023)*

Soit $f \in \mathcal{C}^3([0;1], \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. (a) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ et $t \in \left[\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\right]$.
   Montrer :
   $$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3$$
   avec M indépendant de k et de t.

   (b) En déduire :
   $$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Correction

1. D'après le cours de Sup sur les sommes de Riemann :
   $$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. (a) f étant de classe $\mathcal{C}^3$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t-\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{3!}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3 \sup_{x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]}\left(f^{(3)}(x)\right)$$

Par conséquent, $M = \sup\limits_{x\in[0;1]}\left(f^{(3)}(x)\right)$ convient.

(b) L'idée essentielle sur les sommes de Riemann est qu'il s'agit de la somme d'aires de rectangles :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t$$

La question précédente étudie l'écart entre $f(t)$ et $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ pour t compris entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{(k+1)}{n}$.

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) + \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On intègre l'inégalité de la question précédente entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$.

$$\begin{aligned} & \int_{k/n}^{(k+1)/n}\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t-\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}t \\ \leq\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\mathrm{d}t = \left[\frac{M}{24}\left(t-\frac{k}{n}\right)^4\right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ \leq\ & \frac{M}{24n^4} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) + \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{24n^4}$$

On en déduit :

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) + \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} = \frac{M}{24n^3}$$

Donc :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n}=\frac{1}{2n^2}$

$\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\right]_{k/n}^{(k+1)/n}=\frac{1}{3n^3}$

Donc :

$\displaystyle S_n(f)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1}f''\left(\frac{k}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

f' et f'' sont continues donc :

$\displaystyle S_n(f')\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$ ce qu'on peut écrire $\displaystyle S_n(f')=\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t+o(1)$

$\displaystyle S_n(f'')\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t$ ce qu'on peut écrire $\displaystyle S_n(f'')=\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t+o(1)$

Donc :

$\displaystyle S_n(f)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n}\right)$

En reprenant ce qui précède, on voit que f de classe $\mathcal{C}^2$ suffit pour ce développement donc :

$\displaystyle S_n(f')=\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n}\right)$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}S_n(f)&=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{f(1)-f(0)}{2n}+\frac{1}{12n^2}\left(f'(1)-f'(0)\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Exercice 3 *(CCP 2024)*

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : x\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{1/2}=1$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante.
3. Montrer que la suite (x_n) converge et donner sa limite.

Correction

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   Soit $f_n\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{1/2}\end{cases}$.
   f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
   $\forall x>0\ f_n'(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{1/2}+\dfrac{x}{2n}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-1/2}>0$
   De plus $\lim\limits_0 f_n=0$ et $\lim\limits_{+\infty}f_n=+\infty$, donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   D'où l'existence et l'unicité de x_n qui est l'antécédent de 1 par f_n.
2. $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*\ f_{n+1}(x)\le f_n(x)$
   En particulier $f_{n+1}(x_n)\le f_n(x_n)=1=f_{n+1}(x_{n+1})$
   f_{n+1} étant strictement croissante, on en déduit $x_n\le x_{n+1}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \ f_n(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} \geq 1$
   On en déduit :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ x_n \leq 1$
   La suite (x_n) est croissante et majorée donc elle converge.
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ x_n \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^{1/2} = 1$
   En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $l = 1$.

Exercice 4 *(Mines 2023)*

Pour tout $n \geq 3$, on pose $P_n = X^n - nX + 1$.
Montrer que P_n admet deux racines positives. On les note a_n et b_n avec $a_n < b_n$.
Donner les limites de (a_n) et de (b_n).
Donner un équivalent de a_n et de b_n.

Correction
Soit $n \geq 3$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ P_n'(x) = nx^{n-1} - n = n\left(x^{n-1} - 1\right)$ du signe de $x - 1$ (sur $\mathbb{R}_+$).
La fonction polynomiale associée à P_n est donc strictement décroissante sur $[0;1]$ de $1 > 0$ à $2 - n < 0$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ de $2 - n < 0$ à $+\infty$.
Donc P_n a deux racines positives avec $0 < a_n < 1 < b_n$.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 3 \ P_n\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{1}{n}\right)^n > 0 \\ P_n\left(\frac{2}{n}\right) &= \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 < 0 \text{ car } 0 < \frac{2}{n} < 1 \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n} \in [0;1]$ donc d'après l'étude des variations de P_n :
$\forall n \geq 3 \ \frac{1}{n} < a_n < \frac{2}{n}$
Donc $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 3 \ P_n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 - \frac{1}{n} + 1 \\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ donc :
$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
Donc $P_n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n} < 0$.
On en déduit qu'à partir d'un certain rang $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.
Donc $a_n \sim \frac{1}{n}$.

$b_n > 1$ donc $nb_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

$\forall n \geq 3\ b_n^n = nb_n - 1 = nb_n\left(1 - \dfrac{1}{nb_n}\right)$
Donc :
$\forall n \geq 3\ n\ln(b_n) = \ln(n) + \ln(b_n) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{nb_n}\right)$
Donc :
$(n-1)\ln(b_n) = \ln(n) + o(1) \sim \ln(n)$
On en déduit $\ln(b_n) \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.
En particulier $\ln(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
On a alors $\ln(b_n) \sum b_n - 1$ donc $b_n - 1 \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.
Finalement, $b_n = 1 + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 5 *(Mines 2024)*

Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$

Correction
Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$
On prend $x = n$ et $y = n+2$ avec $n \in \mathbb{N}$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ f(n+1) = \dfrac{1}{2}(f(n) + f(n+2))$ ou encore $f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0$
On en déduit :
$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) = an + b$
$n = 0$ donne $b = f(0)$
$n = 1$ donne $a + b = f(1)$
Soit $q \in [\![2; +\infty[\![$.
On prend $x = \dfrac{n}{q}$ et $y = \dfrac{n+2}{q}$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ f\left(\dfrac{n+1}{q}\right) = \dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{n}{q}\right) + f\left(\dfrac{n+2}{q}\right)\right)$
Donc :
$f\left(\dfrac{n+2}{q}\right) - 2f\left(\dfrac{n+1}{q}\right) + f\left(\dfrac{n}{q}\right) = 0$
On en déduit :
$\exists (c,d) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ f\left(\dfrac{n}{q}\right) = c\,\dfrac{n}{q} + d$
$n = 0$ donne $d = f(0) = b$.
$n = q$ donne $a + b = f(1) = c + d = c + b$. On en déduit $c = a$ et :
$\forall (n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\ f\left(\dfrac{n}{q}\right) = a\,\dfrac{n}{q} + b$
ou encore :
$\forall r \in \mathbb{Q}_+\ f(r) = ar + b$
$\forall r \in \mathbb{Q}_+\ f(-r) + f(r) = 2f\left(\dfrac{r + (-r)}{2}\right) = 2f(0)$
Donc :
$\forall r \in Q_+\ f(-r) = 2b - (ar + b) = a(-r) + b$
et :

$\forall r \in \mathbb{Q}\ f(r) = ar + b$
f étant continue, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = ax + b$
La réciproque est triviale.

Exercice 6 *(X 2013)*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On suppose que f est bornée et que f'' est positive.
Montrer que f est constante.

Correction
f'' est positive donc f est convexe.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.
f est convexe donc :
$\forall t \in \mathbb{R}\ f(t) \geq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$
Si $f'(t_0) > 0$ alors $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.
C'est absurde car on a supposé f bornée.
Donc $f'(t_0) \leq 0$.
Si $f'(t_0) < 0$ alors $f(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} +\infty$.
C'est absurde car on a supposé f bornée.
Donc $f'(t_0) = 0$.
On a donc prouvé :
$\forall t \in \mathbb{R}\ f'(t) = 0$
On en déduit que f est constante.

Exercice 7 *(Mines 2023)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.
Montrer qu'il existe deux réels A et B indépendants de f tels que :
$\sup\limits_{\mathbb{R}} (|f|) \leq A \int_0^{2\pi} |f| + B \int_0^{2\pi} |f'|$

Correction
f est continue sur le segment $[0; 2\pi]$ donc :
$\exists (x_m, x_M) \in [0; 2\pi]^2$ tq $\forall x \in [0; 2\pi]\ \ |f(x_m)| \leq |f(x)| \leq |f(x_M)|$
f étant 2π-périodique, $\sup\limits_{\mathbb{R}} (|f|) = |f(x_M)|$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}} (|f|) &= |f(x_M)| = |f(x_M) - f(x_m) + f(x_m)| \\
&\leq |f(x_M) - f(x_m)| + |f(x_m)| \\
&\leq \left| \int_{x_m}^{x_M} f'(t)\, \mathrm{d}t \right| + |f(x_m)| \text{ car } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\
&\leq \int_{\min(x_m, x_M)}^{\max(x_m, x_M)} |f'(t)|\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_m)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Exercice 8 *(Mines 2023)*

1. Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ avec $g \geq 0$.
   Montrer :
   $\exists c \in [a;b]$ tq $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a;b], \mathbb{R})$ avec $f' \geq 0$ et $\phi \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$.
   Montrer :
   $\exists c \in [a;b]$ tq $\displaystyle\int_a^b f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c \phi(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b \phi(t)\,\mathrm{d}t$
3. ?

Correction

1. Si g est la fonction nulle, n'importe quel c convient.
   On suppose que g n'est pas la fonction nulle. Au vu des hypothèses, $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t > 0$.
   f étant continue sur le segment $[a;b]$, il existe $(x_m, x_M) \in [a;b]^2$ tel que :
   $\forall x \in [a;b]\ f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$
   On multiple par $g(x) \geq 0$:
   $\forall x \in [a;b]\ f(x_m)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x_M)g(x)$
   On intègre :
   $\displaystyle f(x_m)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x_M)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
   On divise par $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t > 0$:
   $f(x_m) \leq \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \leq f(x_M)$
   On invoque le théorème des valeurs intermédiaires :
   $\exists c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}$.
2. Au vu des hypothèses, on peut procéder à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\int_a^t \phi(u)\,\mathrm{d}u\right]_a^b - \int_a^b \left(f'(t)\int_a^t \phi(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \left(f'(t)\int_a^t \phi(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   D'après la première question (dont les hypothèses sont bien vérifiées) :
   $\exists c \in [a;b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b \left(f'(t)\int_a^t \phi(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t = \int_a^c \phi(u)\,\mathrm{d}u \times \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$
   On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\int_a^t \phi(u)\,\mathrm{d}u\right]_a^b - \int_a^b \left(f'(t)\int_a^t \phi(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}t - (f(b) - f(a))\int_a^c \phi(u)\,\mathrm{d}u \\ &= f(a)\int_a^c \phi(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b \phi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Exercice 9 *(X 2023)*

Soit $C = 0,123456789101112131415.....$
Montrer que C est irrationnel.

Correction

```
L’examinateur attendait que l’on connaisse et montre l’équivalence :
x rationnel équivaut à les décimales de x forment une suite périodique
à partir d’un certain rang.
```

On va d'abord montrer que la suite des décimales de C n'est pas périodique à partir d'un certain rang, puis on prouvera l'équivalence.

Supposons la suite des décimales de C périodique à partir d'un certain rang :
$\exists (n_0, T) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0$ $c_{n+T} = c_n$
Plus concrètement, la suite des décimales de C est constitué au delà d'un certain rang d'un motif de longueur T qui se répète.
Au delà de n_0, apparaissent des nombres de la forme $1\dots1$ de longueur arbitraire donc de longueur supérieure à $2T$.
Dans la suite de longueur supérieure à $2T$ formée de 1, le motif de longueur T apparaît dans son intégralité. Par conséquent, l'écriture décimale de C est formée uniquement de 1 à partir d'un certain rang : c'est absurde.

Supposons que l'écriture de x soit périodique à partir d'un certain rang :
$\exists (n_0, T) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0$ $x_{n+T} = x_n$

$$\begin{aligned} x &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n 10^{-n} = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0+T-1} x_n 10^{-n} + \sum_{n=n_0+T}^{+\infty} x_n 10^{-n} \\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0+T-1} x_n 10^{-n} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} x_{n+T} 10^{-n-T} \\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0+T-1} x_n 10^{-n} + 10^{-T} \sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n 10^{-n} \\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0+T-1} x_n 10^{-n} + 10^{-T} \left(x - \lfloor x \rfloor - \sum_{n=1}^{n_0-1} x_n 10^{-n} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\left(1 - 10^{-T}\right) x$ est rationnel. On conclut facilement car $1 - 10^{-T}$ est un rationnel non nul.

Réciproquement, soit x un nombre rationnel.
$y = x - \lfloor x \rfloor$ est rationnel et a les mêmes décimales que x après la virgule.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $y_n = \lfloor 10^n y \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} y \rfloor$
avec $y_0 = 0$.
Supposons y rationnel : il existe $a \in \mathbb{N}^*$ (le cas $y = 0$ est sans intérêt) et b un entier supérieur ou égal à 2 tels que $y = \dfrac{a}{b}$.
La division euclidienne de $10^n a$ par b donne :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists (q_n, r_n) \in \mathbb{N} \times [\![0; b[\![$ tels que $10^n a = q_n b + r_n$.

On a alors :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ y_n = q_n - 10q_{n-1}$
$10^n a = 10(q_{n-1}b + r_{n-1}) = 10q_{n-1}b + 10r_{n-1}$
Donc r_n est le reste de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b et q_n est la somme de $10q_{n-1}$ et du quotient de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b.
On en déduit que y_n est le quotient de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b.
Les nombres r_n appartiennent à $[\![0; b[\![$ qui est fini donc il existe k et $l \in \mathbb{N}$ avec $k < l$ tel que $r_k = r_l$.
Comme r_n est fonction uniquement de r_{n-1}, on en déduit par récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}\ r_{k+n} = r_{l+n}$
puis :
$\forall n \in \mathbb{N}\ y_{k+n+1} = y_{r+n+1}$
La suite (y_n) est donc périodique de période $l - k$ (ou un diviseur de $l - k$) à partir d'un certain rang.

Exercice 10 *(CCP 2023)*

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$(*) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. Résoudre $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = -\omega^2 f(x) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$.
2. Résoudre $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = \omega^2 f(x) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$.
3. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique vérifie $(*)$, en montrant au préalable :
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
4. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(*)$.
   Montrer que $f(0) \in \{0; 1\}$ et que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
   Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = f''(0)f(x)$.
5. Conclure.

Correction

1. L'énoncé ne le précise pas mais on suppose $\omega > 0$.
   On commence par déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$.
   L'équation caractéristique est $r^2 = -\omega^2$, ses racines $i\omega$ et $-i\omega$.
   La solution générale de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ est donc :
   $y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
   Les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ donnent alors $A = 1$ et $B = 0$.
   Finalement, le problème de Cauchy de l'énoncé a une et une seule solution : $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(\omega x) \end{cases}$.
   On pourra observer :

$$\begin{aligned} & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \cos(\omega(x+y)) + \cos(\omega(x-y)) \\ = \ & 2\cos\left(\frac{\omega(x+y+x-y)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega(x+y-(x-y))}{2}\right) = 2\cos(\omega x)\cos(\omega y) \end{aligned}$$

2. On commence par déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$.
   L'équation caractéristique est $r^2 = \omega^2$, ses racines ω et $-\omega$.
   La solution générale de l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ est donc :
   $y = A\,\mathrm{e}^{\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega t}$
   Les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ donnent alors $A = B = \dfrac{1}{2}$.
   Finalement, le problème de Cauchy de l'énoncé a une et une seule solution :
   $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{-\omega x}}{2} = \cosh(\omega x) \end{cases}$.
3.
$$\begin{array}{rl} & \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ = & \dfrac{1}{4}\left(\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}\right) + \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}\right)\right) \\ = & \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y} + \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y} - \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y}\right) \\ = & \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{-x-y}\right) = \cosh(x+y) \end{array}$$

   On en déduit :
$$\begin{array}{rl} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \cosh(x+y) + \cosh(x-y) \\ = & \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) + \cosh(x)\cosh(-y) + \sinh(x)\sinh(-y) \\ = & 2\cosh(x)\cosh(y) \end{array}$$

   et plus généralement si $\omega \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{array}{rl} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \cosh(\omega(x+y)) + \cosh(\omega(x-y)) \\ = & \cosh(\omega x + \omega y) + \cosh(\omega x - \omega y) \\ = & 2\cosh(\omega x)\cosh(\omega y) \end{array}$$

   En d'autres termes, la fonction $x \mapsto \cosh(\omega x)$ vérifie $(*)$.
4. On prend $x = y = 0$: $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0; 1\}$.
   Supposons $f(0) = 0$.
   On prend $y = 0$:
   $\forall x \in \mathbb{R}\; 2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$
   Donc f est la fonction nulle.
   La fonction nulle vérifie $f''(x) = f''(0)f(x)$.
   On suppose $f(0) = 1$.
   On fixe x et on dérive par rapport à y :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\; f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$
   En prenant $x = y = 0$, on obtient : $0 = 2f'(0)$ donc $f'(0) = 0$.
   On fixe de nouveau x et on dérive par rapport à y :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\; f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$.
   En prenant $y = 0$, on obtient :
   $\forall x \in \mathbb{R}\; 2f''(x) = 2f(x)f''(0)$
5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(*)$.
   $f(0) \in \{0; 1\}$

Si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
Réciproquement, la fonction nulle est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(*)$.
Si $f(0) = 1$ alors $f'(0) = 0$ et f vérifie :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = f''(0)f(x)$
Si $f''(0) = 0$ alors f est une fonction affine.
Comme $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$, f est la fonction constante égale à 1.
Réciproquement, la fonction constante égale à 1 est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(*)$.
Si $f''(0) < 0$, on pose $\omega = \sqrt{-f''(0)}$ de sorte que $f''(0) = -\omega^2$
D'après la première question :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \cos(\omega x)$
et la réciproque a été faite à la question 1.
Si $f''(0) > 0$, on pose $\omega = \sqrt{f''(0)}$ de sorte que $f''(0) = \omega^2$
D'après la deuxième question :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \cosh(\omega x)$
et la réciproque a été faite à la question 3.