Révisions 2025
Probabilités
21 mai 2025

941

Exercice 1 *(Ens 2023)*

A et B détectent des évènements aléatoires et indépendants (ce sont deux détecteurs indépendants).
Pour chaque détecteur, il y a environ 5000 détections par an.
Quelle est la probabilité pour que dans une année les deux détecteurs détectent un évènement avec un écart inférieur à une seconde ?

Correction

On discrétise le temps en secondes.
Il y a $N = 365,25 \times 24 \times 3600 = 31557600$ secondes dans une année.
Pour A, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si il y a détection, 0 sinon.
On peut considérer que les X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.
Le nombre total de détections est $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$.
En prenant l'espérance, on a $p \simeq \dfrac{5000}{N} \simeq 1,6\ 10^{-4}$.
Pour B, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si il y a détection, 0 sinon.
On peut considérer que les Y_i sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.
L'évènement dont on cherche la probabilité est $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} ((X_i = 1) \cap (Y_i = 1))$.
On écarte le cas $X_i = 1$ et $Y_{i+1} = 1$ car si on centre les détections, l'écart est d'une seconde. Par ailleurs envisager ce cas, compliquerait les calculs.
L'évènement contraire est $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{N} ((X_i, Y_i) \neq (1, 1))$.
Par indépendance, sa probabilité est :
$\displaystyle\prod_{i=1}^{N} P\left((X_i, Y_i) \neq (1, 1)\right) = \left(1 - p^2\right)^N \simeq 0.45$
La probabilité cherchée est donc $1 - \left(1 - p^2\right)^N \simeq 0.55$

Exercice 2 *(Mines 2023)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un diviseur de n.
On note $D(a) = \{k \in [\![1; n]\!] \text{ tq } a|k\}$.
On se place dans l'espace probabilisé $([\![1; n]\!], \mathcal{P}([\![1; n]\!]), P)$ où P est la probabilité uniforme.

1. Calculer $P(D(a))$.
2. Soient $p_1,\dots,p_l$ les diviseurs premiers de n.
   Montrer que les $D(p_i)$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit $B=\{k\in[\![1;n]\!]$ tq k et n sont premiers entre eux$\}$.
   Calculer $P(B)$.

Correction

1. a est un diviseur de n donc il existe $b\in\mathbb{N}^*$ tel que $n=ab$.
   $D(a)=\{a;2a;\dots;ba\}$ est de cardinal b.
   $P(D(a))=\dfrac{b}{n}=\dfrac{1}{a}$.
2. Il s'agit en fait de montrer que si $q_1,\dots,q_k$ sont des nombres premiers 2 à 2 distincts et divisant n alors :
   $P\left(\bigcap_{i=1}^{k}D(q_i)\right)=\prod_{i=1}^{k}P(D(q_i))$
   Or $\bigcap_{i=1}^{k}D(q_i)=D(q_1\dots q_k)$
   L'examinateur a demandé de le justifier.
   On procède par double inclusion.
   Si un nombre est divisible par $q_1\dots q_k$ alors il est divisible par chaque q_i donc : $D(q_1\dots q_k)\subset\bigcap_{i=1}^{k}D(q_i)$.
   Réciproquement, soit b un nombre divisible par chaque q_i.
   b est divisible par q_1 donc $b=q_1b_1$ avec b_1 entier.
   q_2 est un nombre premier qui divise q_1b_1 donc q_2 apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de q_1b_1. Comme q_1 est un nombre premier différent de q_2, il faut que q_2 apparaisse dans la décomposition en facteurs premiers de b_1.
   Donc $b_1=q_2b_2$ avec b_2 premier et $b=q_1q_2b_2$ et on itère le procédé.
   En tous cas :
$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{i=1}^{k}D(q_i)\right)&=P\left(D(q_1\dots q_k)\right)=\frac{1}{q_1\dots q_k}\\&=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{q_i}=\prod_{i=1}^{k}P(D(q_i))\end{aligned}$$
3. $\overline{B}=\bigcup_{i=1}^{l}D(p_i)$ donc $B=\bigcap_{i=1}^{l}\overline{D(p_i)}$
   Les $D(p_i)$ étant mutuellement indépendants, il en est de même de leurs complémentaires et :
   $P(B)=\prod_{i=1}^{l}P\left(\overline{D(p_i)}\right)=\prod_{i=1}^{l}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right)=\prod_{i=1}^{l}\dfrac{p_i-1}{p_i}$

Exercice 3 *(CCP 2023)*

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$.
Soit A l'évènement : X est un nombre pair.
Soit B l'évènement : X est un multiple de 3.

Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Correction

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=2n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2n-1}p \\
&= \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n} = \frac{p}{q}\frac{q^2}{1-q^2} \\
&= \frac{pq}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q} = \frac{1-p}{2-p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=3n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{3n-1}p \\
&= \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty} q^{3n} = \frac{p}{q}\frac{q^3}{1-q^3} \\
&= \frac{pq^2}{(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{q^2}{1+q+q^2} = \frac{1-2p+p^2}{3-2p+p^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A\cap B) &= P(6|X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=6n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{6n-1}p \\
&= \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty} q^{6n} = \frac{p}{q}\frac{q^6}{1-q^6} \\
&= \frac{pq^5}{(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)} = \frac{q^5}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A \text{ et } B \text{ indépendants} \\
\iff\ & P(A\cap B) = P(A)P(B) \\
\iff\ & \frac{q^3}{(1+q)(1+q+q^2)} = \frac{q^5}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5} \\
\iff\ & \frac{1}{1+2q+2q^2+q^3} = \frac{q^2}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5} \\
\iff\ & 1+q+q^2+q^3+q^4+q^5 = q^2+2q^3+2q^4+q^5 \\
\iff\ & q^4+q^3 = 1+q \\
\iff\ & q^3(1+q) = 1+q \\
\iff\ & q^3 = 1 \\
\iff\ & q = 1 \text{ ce qui est exclus}
\end{aligned}$$

A et B ne sont jamais indépendants.

Exercice 4 *(Mines-Telecom 2023)*

On dispose de deux urnes : l'urne numéro 1 quui contient 3 boules blanches et 5 boules noires et l'urne numéro 2 qui contient 2 boules blanches et 3 boules noires.
On tire la première boule dans une des urnes, tirées au sort avec équiprobabilité des deux urnes.
On note la couleur de la boule et on la remet dans l'urne dont elle provient.
Si la boule est blanche, le prochain tirage se fera dans l'urne numéro 1. Si elle est noire, dans l'urne 2.
On note p_n la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième tirage.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. Déterminer p_n.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : la n-ième boule tirée est blanche.
   On note A_0 l'évènement : le premier tirage se fait dans l'urne 1.
   Par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} p_1 &= P(A_1) = P(A_1 \mid A_0)P(A_0) + P(A_1 \mid \overline{A_0})P(\overline{A_0}) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{15}{80} + \frac{16}{80} = \frac{31}{80} \end{aligned}$$
   Ensuite, toujours avec la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \ p_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \mid A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} \mid \overline{A_n})P(\overline{A_n}) \\ &= \frac{3}{8}p_n + \frac{2}{5}(1-p_n) \\ &= -\frac{1}{40}p_n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$
   Cette formule est valable pour $n = 0$ en prenant $p_0 = \dfrac{1}{2}$.
2. L'équation $x = \dfrac{-x}{40} + \dfrac{2}{5}$ possède une et une seule solution : $l = \dfrac{16}{41}$.
   $\forall n \in \mathbb{N} \ p_{n+1} = -\dfrac{1}{40}p_n + \dfrac{2}{5}$
   et $l = -\dfrac{1}{40}l + \dfrac{2}{5}$ donc :
   $\forall n \in \mathbb{N} \ p_{n+1} - l = -\dfrac{1}{40}(p_n - l)$
   Donc :
   $\forall n \in \mathbb{N} \ p_n = l + \left(\dfrac{-1}{40}\right)^n (p_0 - l) = \dfrac{16}{41} + \left(\dfrac{-1}{40}\right)^n \dfrac{9}{82}$

Exercice 5 *(Mines 2024)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements.
Soit $\Gamma_n = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \cdots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$.
Calculer $\displaystyle\sum_{(B_1,\ldots,B_n)\in\Gamma_n} P\left(B_1 \cup \cdots \cup B_n\right)$.

Correction

La première difficulté de l'exercice consiste à comprendre l'énoncé ie la notation $\displaystyle\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma_n} P\left(B_1\cup\cdots\cup B_n\right)$.

Dans le cas $n=1$, $\Gamma_1=\{A_1;\overline{A_1}\}$ et la somme cherchée est $P(A_1)+P(\overline{A_1})=1$.
Dans le cas $n=2$:
$\Gamma_2=\{A_1;\overline{A_1}\}\times\{A_2;\overline{A_2}\}=\Big\{(A_1,A_2),(A_1,\overline{A_2}),(\overline{A_1},A_2),(\overline{A_1},\overline{A_2})\Big\}$.
La somme cherchée est $P(A_1\cup A_2)+P(A_1\cup\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\cup A_2)+P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})$

$$\begin{aligned}
P(A\cup B)+P(A\cup\overline{B}) &= P\Big((A\cup B)\cup(A\cup\overline{B})\Big)+P\Big((A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\Big)\\
&= P(A\cup B\cup\overline{B})+P\Big(\Big(A\cap(A\cup\overline{B})\Big)\cup\Big(B\cap(A\cup\overline{B})\Big)\Big)\\
&= P(\Omega)+P\Big(A\cup\Big((B\cap A)\cup(B\cap\overline{B})\Big)\Big)\\
&= 1+P\left(A\cup((B\cap A)\cup\emptyset)\right)=1+P\left(A\cup(B\cap A)\right)\\
&= 1+P(A)
\end{aligned}$$

Donc pour $n=2$, la somme cherchée est :
$1+P(A_1)+1+P(\overline{A_1})=3$
Dans le cas général :

$$\begin{aligned}
&\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma_n} P\left(B_1\cup\cdots\cup B_n\right)\\
=\ &\sum_{(B_1,\dots,B_{n-1})\in\Gamma_{n-1}}\Big(P\left(B_1\cup\cdots\cup B_{n-1}\cup A_n\right)+P\Big(B_1\cup\cdots\cup B_{n-1}\cup\overline{A_n}\Big)\Big)\\
=\ &\sum_{(B_1,\dots,B_{n-1})\in\Gamma_{n-1}}\left(1+P\left(B_1\cup\cdots\cup B_{n-1}\right)\right)\\
=\ &2^{n-1}+\sum_{(B_1,\dots,B_{n-1})\in\Gamma_{n-1}} P\left(B_1\cup\cdots\cup B_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

On doit donc déterminer u_n avec $u_1=1$ et :
$\forall n\geq 2\ u_n=u_{n-1}+2^{n-1}$
Une récurrence triviale donne :
$\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=2^n-1$