Révisions 2025
Algèbre linéaire : trace et déterminant
22 mai 2025

941

Exercice 1 *(Mines 2023)*

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
Soit $\phi \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto \operatorname{tr}(MA)B \end{cases}$.
A quelle(s) condition(s) sur A et B, ϕ est-il diagonalisable ?

Exercice 2 *(Mines 2023)*

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
Soit $\phi \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M + \operatorname{tr}(AM)B \end{cases}$.
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 3 *(X 2023)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs réelles.

On note $W_n(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$.

1. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, non tous nuls, tels que pour tout $t \in I$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) = 0$.
   Que vaut $W_n(f_1, \ldots, f_n)$?
2. On suppose que $W_n(f_1, \ldots, f_n)$ est la fonction nulle et que $W_{n-1}(f_1, \ldots, f_{n-1})$ ne s'annule pas sur I.

   Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$.

   Indication : on admettra que si $a_0, \ldots, a_{n-2}$ sont des fonctions continues sur I alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y'(t) + a_0(t)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension $n-1$.

Exercice 4 *(Mines PC 2002, X 2023)*

Soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
$\mathcal{F}$ est libre $\Longleftrightarrow$ il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\det(f_i(x_j)) \neq 0$

Exercice 5 *(Mines 2023)*

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

1. Montrer :
   $\forall M \in E \ \det\left(\overline{M}\right) = \overline{\det(M)}$
2. Trouver une condition pour qu'il existe une base de E formée de matrices inversibles.

Exercice 6 *(Mines 2023)*

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & & b_1 \\ b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \dots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$

Exercice 7 *(Mines 2023)*

Rang et déterminant de $\begin{pmatrix} m-1 & m & 1 \\ m & 2 & 3 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.