Révisions 2025
Fonctions intégrables
26 mai 2025

941

Exercice 1

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $]0;+\infty[$?

Exercice 2 *(Banque CCP MP)*

Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 3 *(Banque CCP MP)*

La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

Exercice 4

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$?

Exercice 5 *(CCP 2024)*

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

Exercice 6 *(Mines 2023)*

Soient a et b deux réels avec $a<b$, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Convergence et calcul de $\displaystyle\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n \,\mathrm{d}t$.

Exercice 7

Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \sim_{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$
Donner un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u+n}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 8 *(Mines PSI 2014)*

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x^3)^{1/3}}$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que $I = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2 - u + 1}$. Calculer I.

Exercice 9 *(Mines PSI 2014)*

Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-3x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}} \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 10 *(Mines 2024)*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ telle que $f' + af$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f' + af$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11 *(ENS 2023)*

Expliciter, en discutant sur la valeur du paramètre a, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{1}{2}f'' - \dfrac{1}{2}f' - f = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$.