Révisions 2025
Fonctions intégrables
26 mai 2025

941

Exercice 1

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $]0;+\infty[$?

Correction
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in [1;+\infty[\ |f(x)| \leq \dfrac{2}{x^{\frac{5}{3}}}$
donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$.
En 0 : $\cos 5x - \cos 3x = 1 - \dfrac{25}{2}x^2 - 1 + \dfrac{9}{2}x^2 \sim -8x^2$
$f(x) \sim_0 -8x^{1/3}$
f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ donc f est intégrable sur $]0;1]$.
Finalement f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 *(Banque CCP MP)*

Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Correction
Soit a un réel strictement positif.
On pose $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$.
f est continue sur $]0,+\infty[$.
$f(x) \underset{0}{\sim} \ln x$.

ln est intégrable sur $]0,1]$ donc f est intégrable sur $]0,1]$ (*)
$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^a} = h(x)$.

Premier cas : si $a > 1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1+a}{2}} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1-a}{2}} \ln x = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $h(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1+a}{2}}}\right)$.
Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\frac{1+a}{2}}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\dfrac{1+a}{2} > 1$).

Donc, h est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Donc, f est intégrable sur $[1, +\infty[$. (**).
D'après (*) et (**), f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Deuxième cas : si $a \leqslant 1$

$\forall\, x \in [\mathrm{e}, +\infty[,\ h(x) \geqslant \dfrac{1}{x^a}$.
Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^a}$ non intégrable sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.(fonction de Riemann avec $a \leqslant 1$)
Donc, par règle de minoration pour les fonctions positives, h non intégrable sur $[\mathrm{e}, +\infty[$
Donc f non intégrable sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
Donc, f non intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$.

f est continue sur $]2, +\infty[$.
$f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{2}{\sim} \dfrac{e^{-2}}{2} \times \dfrac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}$.

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]2, 3]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]2, 3]$ car $\dfrac{1}{2} < 1$).
Donc, f est intégrable sur $]2, 3]$. (*)
$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = g(x)$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 g(x) = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $g(x) = o(\dfrac{1}{x^2})$.
Comme $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[3, +\infty[$, on en déduit que g est intégrable sur $[3, +\infty[$.
Donc, f est intégrable sur $[3, +\infty[$. (**)
D'après (*) et (**), f est intégrable sur $]2, +\infty[$.

Exercice 3

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$?

Correction
$f : x \mapsto \cos(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.
On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $t = x^2$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
On fait une intégration par parties :
$u'(t) = \cos(t)$, $u(t) = \sin(t)$
$v(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \dfrac{1}{2}t^{-1/2}$, $v'(t) = -\dfrac{1}{4}t^{-3/2}$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$sur $[1; +\infty[$ et $u(t)v(t) = \dfrac{\sin(t)}{2\sqrt{t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donc l'intégration par parties est justifiée.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.
Mais :
$\forall t \in [1; +\infty[\ \left|\dfrac{\sin(t)}{t^{3/2}}\right| \leq \dfrac{1}{t^{3/2}}$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$ converge car $\dfrac{3}{2} > 1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 4 *(CCP 2024)*

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

Correction

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2} \end{cases}$ est continue.
En $+\infty$, $f(t) \sim \dfrac{1}{t^4}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^4}$ est intégrable en $+\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On procède à une intégration par parties :
$u(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2} = (1+t^2)^{-2}$, $u'(t) = (-2)(2t)(1+t^2)^{-3} = -\dfrac{4t}{(1+t^2)^3}$
$v'(t) = 1$, $v(t) = t$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc l'intégration par parties est justifiée.
De plus $u(0)v(0) = 0$ donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{4t^2}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{4t^2+4-4}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} - 4\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}
\end{aligned}$$

On échoue, mais on se dit qu'en partant de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$ cela pourrait marcher.
On prend donc $u(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $u'(t) = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$
$v'(t) = 1$, $v(t) = t$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc l'intégration par parties est justifiée.
De plus $u(0)v(0) = 0$ donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2+2-2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} - 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \\
&= \pi - 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5 *(Mines 2023)*

Soient a et b deux réels avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Convergence et calcul de $\displaystyle\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n \,\mathrm{d}t$.

Correction

La fonction $f_{\alpha,n} \begin{cases} [a;b[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto (b-t)^\alpha (t-a)^n \end{cases}$ est continue.

De plus $f_{\alpha,n}(t) \sim_{b^-} (b-a)^n \dfrac{1}{(b-t)^{-\alpha}}$ donc :

$f_{\alpha,n}$ est intégrable sur $[a;b[$ si, et seulement si, $-\alpha < 1$ ie $\alpha > -1$.
$f_{\alpha,n}$ étant positive, il ne peut y avoir semi convergence donc :
$\displaystyle\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n \,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > -1$.

On pose donc pour tout $\alpha > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{\alpha,n} = \displaystyle\int_a^b (b-t)^\alpha (a-t)^n \,\mathrm{d}t$.
On suppose $n \in \mathbb{N}^*$ et on procède à une intégration par parties.
$u(t) = (t-a)^n$, $u'(t) = n(t-a)^{n-1}$
$v'(t) = (b-t)^\alpha$, $v(t) = -\dfrac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b[$ et $u(t)v(t) = -\dfrac{(b-t)^{\alpha+1}(t-a)^n}{\alpha+1} \underset{\substack{t\to b \\ t<b}}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha+1>0$
L'intégration par parties est donc justifiée.
Comme de plus $u(a) = 0$, on peut écrire directement :
$I_{\alpha,n} = \dfrac{n}{\alpha+1} \displaystyle\int_a^b (b-t)^{\alpha+1}(t-a)^{n-1} \,\mathrm{d}t = \dfrac{n}{\alpha+1} I_{\alpha+1,n-1}$
En itérant le procédé, on obtient :
$I_{\alpha,n} = \dfrac{n!}{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} \displaystyle\int_a^b (b-t)^{\alpha+n} \,\mathrm{d}t = \dfrac{n!(b-a)^{n+\alpha+1}}{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$
ce qu'on peut ensuite démontrer rigoureusement au moyen d'un raisonnement par récurrence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall \alpha \in]-1;+\infty[\displaystyle\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n \,\mathrm{d}t = \dfrac{n!(b-a)^{n+\alpha+1}}{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$
$\mathcal{P}(0)$ est vraie :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]-1;+\infty[\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n \,\mathrm{d}t &= \int_a^b (b-t)^\alpha \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_a^b \\ &= \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{0!(b-a)^{0+\alpha+1}}{\alpha+0+1} \end{aligned}$$

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]-1;+\infty[\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^{n+1} \,\mathrm{d}t &= \frac{n+1}{\alpha+1} \int_a^b (b-t)^{\alpha+1}(t-a)^n \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n+1}{\alpha+1} \frac{n!(b-a)^{n+\alpha+2}}{(\alpha+2)\dots(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} \\ &= \frac{(n+1)!(b-a)^{n+1+a+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n+1+1)} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Exercice 6

Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \sim_{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$

Donner un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u+n}\,\mathrm{d}u$.

Correction

Soit $f \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \end{cases}$.

f est continue sur $[1;+\infty[$.

$f = o(\mathrm{e}^{-u})$ donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$ (et en fait sur $[x;+\infty[$ pour tout $x > 0$)

On procède à une intégration par parties :

$f(u) = \dfrac{1}{u}$, $f'(u) = -\dfrac{1}{u^2}$

$g'(u) = \mathrm{e}^{-u}$, $g(u) = -\mathrm{e}^{-u}$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x;+\infty$ et $f(u)g(u) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$ donc l'intégration par parties est justifiée.

$\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u$

$\displaystyle 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u \leq \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$

Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u = o\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)$

D'où : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \sim_{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$

Soit $n \geq 1$.

$\forall u \in \mathbb{R}_+\ 0 \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u+n} \leq \mathrm{e}^{-u}$

Donc $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u+n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $u = t - n$.

$\displaystyle I_n = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(t-n)}}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^n \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \sim \mathrm{e}^n \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} = \frac{1}{n}$

Exercice 7 *(Mines PSI 2014)*

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x^3)^{1/3}}$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que $I = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}$. Calculer I.

Correction

1. La fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-x^3)^{1/3}}$ est continue positive sur $]0,1[$, avec $f(x) \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{1}{(1-x)^{1/3}}$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x^{2/3}}$. Ainsi f est intégrable sur $]0;1[$.
2. On cherche un changement de variable qui envoie 0 sur 0 et 1 sur $+\infty$.
   On pose donc $t = \dfrac{x}{1-x}$.

$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$
Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ strictement croissant.
$(1-x)t = x$ donc $t = x + xt$ et $x = \dfrac{t}{1+t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{(1+t)^2}$.
On en déduit $x^2 - x^3 = x^2(1-x) = \dfrac{t^2}{(1+t)^2}\dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t^2}{(1+t)^3}$
Donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{t^{2/3}}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2/3}(1+t)}$.
On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $t = u^3$:
$I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3u^2\,\mathrm{d}u}{u^2(1+u^3)} = 3\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}$
On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant : $u = \dfrac{1}{v}$.
$I = 3\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{v^3}{v^3+1}\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = 3\int_0^{+\infty} \frac{v\mathrm{d}v}{v^3+1}$
On en déduit :
$2I = 3\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u+1}{u^3+1}\,\mathrm{d}u = 3\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1-x+x^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+3/4} \\
&= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{4\pi}{6} \\
&= \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}$$

Finalement

$$I = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 8 *(Mines PSI 2014)*

Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-3x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x$.

Correction
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1-3x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}}\arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
$\forall x \in]0;1[\ x(1-x^2) > 0$
$\forall x \in]0;1[\ 1 - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} > 0$ et $\dfrac{x-1}{x+1} + 1 = \dfrac{2x}{x+1} > 0$
Donc :
$\forall x \in]0;1[\ \dfrac{x-1}{x+1} \in]-1;1[$
Donc f est continue sur $]0;1[$.
En 0, $f(x) \sim \dfrac{-\pi}{2\sqrt{x}}$ donc f est intégrable en 0.
En 1, $f(x) \sim \dfrac{-2}{\sqrt{2(1-x)}}\dfrac{x-1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en posant $f(1) = 0$
Pour le calcul, on fait une IPP :
$u'(x) = \dfrac{1-3x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}}$, $u(x) = 2\sqrt{x(1-x^2)}$

$v(x) = \arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, $v'(x) = \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}} = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ et la fonction uv tend vers 0 en 0 et en 1.

$$\begin{aligned} I &= -2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x = -2\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = -2\int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= -2\int_0^{\pi/2}(1-\sin(t))\,\mathrm{d}t : \text{ changement de variable } \mathcal{C}^1 \nearrow\nearrow x = \sin(t) \\ &= -2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 2-\pi \end{aligned}$$

Exercice 9 *(Mines 2024)*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ telle que $f' + af$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f' + af$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Correction

1. Soit $g = f' + af$.
   f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g(x)$.
   ESSM : $y' + ay = 0$ de solution générale $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$
   On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$
   On obtient $C'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = g(x)$ donc on peut prendre $C(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$
   Donc :
   $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-ax}\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$
   En évaluant en 0, on trouve $C = f(0)$.
   $a > 0$ donc la fonction $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Il reste donc à montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-ax}\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \forall X > 0 \int_0^X \left|\mathrm{e}^{-ax}\int_0^x g(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x &\leq \int_0^X \left(\mathrm{e}^{-ax}\int_0^x |g(t)|\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &\leq \left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{-a}\int_0^x |g(t)|\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right]_0^X - \int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{-a}|g(x)|\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \\ &\leq -\frac{\mathrm{e}^{-aX}}{a}\int_0^X |g(t)|\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{a}\int_0^X |g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   En d'autres termes la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_0^X \left|\mathrm{e}^{-ax}\int_0^x g(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x$ est majorée.
   Comme la fonction $x \mapsto \left|\mathrm{e}^{-ax}\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right|$ est positive, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-ax}\int_0^x g(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x$ converge.
   Il en résulte que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-ax}\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. Il s'agit donc de trouver une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ mais donc la dérivée n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{i\,\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{i\,\mathrm{e}^x - x} \end{cases}$
   f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
   $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ |f(x)| = \mathrm{e}^{-x}$
   Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
   $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ f'(x) = (i\,\mathrm{e}^x - 1)\ \mathrm{e}^{i\,\mathrm{e}^x - x} = i\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{e}^x} - f(x)$
   $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \left|i\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{e}^x}\right| = 1$
   Donc la fonction $x \mapsto i\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{e}^x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   f n'étant pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que f' n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10 *(ENS 2023)*

Expliciter, en discutant sur la valeur du paramètre a, l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{1}{2}f'' - \dfrac{1}{2}f' - f = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2\ \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$.

Correction
A été vue en Sup la résolution de $ay'' + by' + cy = d$.
Si $d = 0$ l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.
Si $d \neq 0$, l'ensemble des solutions est un espace affine (ce vocabulaire,mentionné par l'examinateur, n'est pas au programme, pour faire simple disons que c'est l'image d'un espace vectoriel par translation).
Ces résultats ne s'appliquent pas directement ici car le second membre dépend de la fonction.

On commence par résoudre $\dfrac{1}{2}y'' - \dfrac{1}{2}y' - y = C$ où C est une constante.
La fonction $y = -C$ est une solution particulière.
On résout $\dfrac{1}{2}y'' - \dfrac{1}{2}y' - y = 0$.
Equation caractéristique : $\dfrac{1}{2}r^2 - \dfrac{1}{2}r - 1 = 0$ ou $r^2 - r - 2 = 0$.
$\Delta = 9 = 3^2$, $r = -1$ ou 2.
Solution générale de l'ESSM : $y = A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{2x}$.
Solution générale de $\dfrac{1}{2}y'' - \dfrac{1}{2}y' - y = C$: $y = -C + A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{2x}$.
Donc si f est solution de l'équation de l'énoncé alors :
$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{2x} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2\ \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$
mais l'intégrale doit converger.
$\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = -A\,\mathrm{e}^{-x} + 2B\,\mathrm{e}^{2x}$
Remarque
On peut obtenir ce résultat différemment.
On suppose que f est solution.
f est donc deux fois dérivable. En gardant f'' d'un côté et en mettant tout le reste de l'autre, on montre que f'' est deux fois dérivable, donc f est 4 fois dérivable.
On peut donc dériver l'équation de départ. On obtient que f' est solution de $\dfrac{1}{2}y'' - \dfrac{1}{2}y' - y = 0$ qu'on résout.

- **Premier cas :** $a \geq 2$
  Si $B \neq 0$ alors $f'(x)^2\,\mathrm{e}^{ax} \sim_{+\infty} 4B^2\,\mathrm{e}^{(a+4)x}$ avec $a+4 \geq 0$.
  Donc la fonction $x \mapsto f'(x)^2\,\mathrm{e}^{ax}$ n'est pas intégrable en $+\infty$.
  Comme la fonction est positive, il ne peut y avoir semi-convergence.
  Donc $B = 0$.
  Si $A \neq 0$, $f'(x)^2\,\mathrm{e}^{ax} \sim_{+\infty} A^2\,\mathrm{e}^{(a-2)x}$ avec $a-2 \geq 0$.
  Donc la fonction $x \mapsto f'(x)^2\,\mathrm{e}^{ax}$ n'est pas intégrable.
  Donc $A = 0$.
  Donc $f' = 0$ et :
  $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = 0$
  f est la fonction nulle.
  La réciproque est triviale.
- **Deuxième cas :** $-4 \leq a < 2$
  On montre comme dans le premier cas que $B = 0$.
  $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = -A\,\mathrm{e}^{-x}$
  Cette fois la fonction $x \mapsto f'(x)^2\,\mathrm{e}^{ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t &= A^2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(a-2)t}\,\mathrm{d}t = A^2\left[\frac{\mathrm{e}^{(a-2)t}}{a-2}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{A^2}{2-a}\end{aligned}$$

  On a donc :
  $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = A\,\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{A^2}{2-a}$
  Réciproquement, soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto A\,\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{A^2}{2-a} \end{cases}$ avec $A \in \mathbb{R}$.
  $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = -A\,\mathrm{e}^{-x}$
  Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2-a}$
  $\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = A\,\mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}f'(x) - f(x) &= \frac{A}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{A}{2}\,\mathrm{e}^{-x} - A\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{A^2}{2-a} \\ &= \frac{A^2}{2-a} = \int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

  L'ensemble des solutions est une famille de fonctions dépendant d'un paramètre. La présence de A^2 fait que l'ensemble des solutions ne sera ni un espace vectoriel ni un espace affine.
- **Troisième cas :** $a < -4$
  Cette fois la fonction $x \mapsto f'(x)^2\,\mathrm{e}^{ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \left(A^2\,\mathrm{e}^{(a-2)t} - 4AB\,\mathrm{e}^{(a+1)t} + 4B^2\,\mathrm{e}^{(a+4)t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{A^2}{2-a} + \frac{4AB}{a+1} - \frac{4B^2}{a+4}\end{aligned}$$

Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{A^2}{a-2} - \dfrac{4AB}{a+1} + \dfrac{4B^2}{a+4}$
Réciproquement ces fonctions conviennent

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ \frac{1}{2}f''(t) - \frac{1}{2}f'(t) - f(t) &= \frac{1}{2}\left(A\,\mathrm{e}^{-x} + 4B\,\mathrm{e}^{2x}\right) - \frac{1}{2}\left(-A\,\mathrm{e}^{-x} + 2B\,\mathrm{e}^{2x}\right) \\
&\quad - \left(A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{A^2}{a-2} - \frac{4AB}{a+1} + \frac{4B^2}{a+4}\right) \\
&= \frac{A^2}{2-a} + \frac{4AB}{a+1} - \frac{4B^2}{a+4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \left(-A\,\mathrm{e}^{-t} + 2B\,\mathrm{e}^{2t}\right)^2 \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(A^2\,\mathrm{e}^{-2t} - 4AB\,\mathrm{e}^{t} + 4B^2\,\mathrm{e}^{4t}\right) \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(A^2\,\mathrm{e}^{-(2-a)t} - 4AB\,\mathrm{e}^{(a+1)t} + 4B^2\,\mathrm{e}^{(a+4)t}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{2-a} + \frac{4AB}{a+1} - \frac{4B^2}{a+4}
\end{aligned}$$