Révisions 2025
Probabilités
26 mai 2025

941

Exercice 1 *(CCP 2023)*

Soit $p \in]0;1[$.
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \; P(X=m, Y=n) = p^2(1-p)^{n+m}$

1. Trouver la loi de X.
2. Trouver la loi suivie par $X+1$,donner son espérance et sa variance.
   En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Donner la loi de Y.
   X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z = \max(X, Y)$ et on affirme qu'il s'agit d'une variable aléatoire.
   Exprimer l'évènement $(Z = n)$ $(n \in \mathbb{N})$ à l'aide des évènements $(X = n)$, $(Y = n)$, $(X \leq n)$ et $(Y \leq n)$.
   En déduire la loi de Z puis son espérance et sa variance.

Exercice 2 *(Centrale 2023)*

On dispose de $p+1$ urnes numérotées de 0 à p.
L'urne numéro j contient j boules rouges et $p-j$ boules noires.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire au sort une urne et ensuite on effectue n tirages avec remise dans cette urne.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X_n et son espérance.
2. Déterminer pour $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{p \to +\infty} P(X_n = k)$

Exercice 3 *(Mines 2023)*

1. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
   Déterminer sa série génératrice.
2. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantesà valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $U = Y + Z$ suive la loi binomiale de paramètres n et p.
   Montrer que Y et Z suivent également des lois binomiales.
3. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
   Soient l et m deux entiers tels que $P(U = l) > 0$, $P(U = m) > 0$ et $m \geq l + 3$.
   Soient $Y = \left\lfloor \dfrac{U}{2} \right\rfloor$ et $Z = \left\lfloor \dfrac{U+1}{2} \right\rfloor$.

(a) Montrer que Y et Z ne sont pas indépendantes.
(b) ?

Exercice 4 *(Mines 2023)*

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ non presque sûrement constantes, indépendantes, de même loi possédant une espérance.
   Soit $R\begin{cases}\Omega \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\\ \omega \mapsto R_{CV}\left(\sum\limits_{n\geq 0} X_n(\omega)z^n\right)\end{cases}$.
   Montrer que $(R>1)=\{\omega\in\Omega \text{ tq } X_n(\omega)=0 \text{ à partir d'un certain rang}\}$.
   En déduire $P(R>1)=0$.
3. Soit $c<1$.
   Montrer que $P(R\leq c)=0$.
4. En déduire que $P(R=1)=1$.

Exercice 5 *(Centrale 2023)*

Soient $X_1,\dots,X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi géométrique de paramètre p.
Soit $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.

1. Calculer $P(X_1\leq k)$.
   Rappeler $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Calculer $P(M_n>k)$.
3. Ecrire une fonction Python `Esp(p,n)` qui effectue 10^3 simulations de M_n et qui donne une valeur approchée de l'espérance de M_n.
   On utilisera la formule $E(M_n)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P(M_n>k)$.
4. Ecrire une fonction Python qui calcule $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
5. Tracer sur un même graphique $(E(M_n))_{1\leq n\leq 50}$, $\left(\frac{-H_n}{\ln(1-p)}\right)_{1\leq n\leq 50}$ et $\left(\frac{-H_n}{\ln(1-p)}+1\right)_{1\leq n\leq 50}$ pour $p=\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{4}$ et faire une conjecture.
6. Montrer que $E(M_n)=\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-(1-p)^{\lfloor t\rfloor}\right)^n\right)\,\mathrm{d}t$
   Il restait au moins 5 questions.
   Je propose la restitution suivante :
7. Montrer : $\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-(1-p)^{t}\right)^n\right)\,\mathrm{d}t\leq E(M_n)\leq 1+\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-(1-p)^{t}\right)^n\right)\,\mathrm{d}t$
8. A l'aide du changement de variable $x=(1-p)^t$, montrer :
   $\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-(1-p)^{t}\right)^n\right)=\frac{-H_n}{\ln(1-p)}$
9. Conclure.

Exercice 6 *(Ens 2023)*

On considère n points deux à deux distincts du plan ($n \geq 3$).
Soit E l'ensemble des parties $[\![1;n]\!]$ de cardinal 2.
On considère une famille $(X_e)_{e\in E}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.
Si $X_e = 1$ alors on trace le segment joignant les points d'indice i et j où $e = \{i;j\}$.
Soient T_n le nombre de triangles et $a_n = p^3 \binom{n}{3}$.
Montrer que :
$\forall \epsilon > 0 \; P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Exercice 7 *(X 2023)*

1. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R} \; \cosh(x) \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$
2. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{-1;1\}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $P(|S_n| \geq \lambda) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/(2n)}$

Exercice 8 *(X 2023)*

Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
On considère un dé à n faces numérotées de 1 à n et un dé à m faces numérotées de 1 à m qu'on jette simultanément.
Peut-on les piper pour que la somme des points obtenus sur les deux dés suivent une loi uniforme ?