

Révisions 2025
Probabilités
26 mai 2025

941

Exercice 1 (CCP 2023)

Soit $p \in]0; 1[$.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X = m, Y = n) = p^2(1 - p)^{n+m}$$

1. Trouver la loi de X .
2. Trouver la loi suivie par $X + 1$, donner son espérance et sa variance.
En déduire l'espérance et la variance de X .
3. Donner la loi de Y .
 X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z = \max(X, Y)$ et on affirme qu'il s'agit d'une variable aléatoire.
Exprimer l'évènement $(Z = n)$ ($n \in \mathbb{N}$) à l'aide des évènements $(X = n)$, $(Y = n)$, $(X \leq n)$ et $(Y \leq n)$.
En déduire la loi de Z puis son espérance et sa variance.

Correction

1. Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $((Y = m))_{m \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements.
Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(X = n, Y = m) = \sum_{m=0}^{+\infty} p^2(1 - p)^{n+m} \\ &= p^2(1 - p)^n \sum_{m=0}^{+\infty} (1 - p)^m = p^2(1 - p)^n \frac{1}{1 - (1 - p)} \\ &= p(1 - p)^n \end{aligned}$$

2. $X + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et :
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X + 1 = n) = P(X = n - 1) = p(1 - p)^{n-1}$
 $X + 1$ suit donc la loi géométrique de paramètre p .
On en déduit $E(X + 1) = \frac{1}{p}$ et $V(X + 1) = \frac{1 - p}{p^2}$.
On en déduit :
 $E(X) = E(X + 1) - 1 = \frac{1 - p}{p}$
 $V(X) = V(X + 1) = \frac{1 - p}{p^2}$.

3. X et Y jouant des rôles symétriques, Y a la même loi que X .

$$\begin{aligned}\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X = m, Y = n) &= p^2(1-p)^{n+m} = p(1-p)^n p(1-p)^m \\ &= P(X = n)P(Y = m)\end{aligned}$$

X et Y sont indépendantes.

4. $(Z = n) = ((X = n) \cap (Y \leq n)) \cup ((X \leq n) \cap (Y = n))$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad P(Z = n) &= P(((X = n) \cap (Y \leq n)) \cup ((X \leq n) \cap (Y = n))) \\ &= P((X = n) \cap (Y \leq n)) + P((X \leq n) \cap (Y = n)) \\ &\quad - P(((X = n) \cap (Y \leq n)) \cap ((X \leq n) \cap (Y = n))) \\ &= 2p(1-p)^n \sum_{k=0}^n P(Y = k) - P((X = n) \cap (Y = n)) \\ &= 2p^2(1-p)^n \sum_{k=0}^n (1-p)^k - p^2(1-p)^{2n} \\ &= 2p^2(1-p)^n \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{1 - (1-p)} - p^2(1-p)^{2n} \\ &= 2p(1-p)^n - 2p(1-p)^{2n+1} - p^2(1-p)^{2n} \\ &= 2p(1-p)^n + (p-2)p(1-p)^{2n}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}E(Z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Z = n) \\ &= 2p \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^n + p(p-2) \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^{2n}\end{aligned}$$

Or :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

ce qui donne en dérivant :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

puis :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}E(Z) &= \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p))^2} + \frac{p(p-2)(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2} \\ &= \frac{2(1-p)}{p} - \frac{(1-p)^2}{p(2-p)} \\ &= \frac{1-p}{p} \left(2 - \frac{1-p}{2-p} \right) = \frac{1-p}{p} \times \frac{(3-p)}{2-p} \\ &= \frac{(3-p)(1-p)}{p(2-p)}\end{aligned}$$

En dérivant la formule ci-dessus, on a :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

et :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(Z = n) \\ &= 2p \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 (1-p)^n + p(p-2) \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 (1-p)^{2n} \\ &= \frac{2p(1-p)(2-p)}{p^3} + p(p-2) \frac{(1-p)^2(2-2p+p^2)}{(p(2-p))^3} \\ &= \frac{1-p}{p^2} \left(2(2-p) - \frac{(1-p)(2-2p+p^2)}{(2-p)^2} \right) \\ &= \frac{1-p}{p^2(2-p)^2} (2(8-12p+6p^2-p^3) - (2-4p+3p^2-p^3)) \\ &= \frac{1-p}{p^2(2-p)^2} (14-20p+9p^2-p^3) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} V(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 \\ &= \frac{1-p}{p^2(2-p)^2} (14-20p+9p^2-p^3) - \frac{(3-p)^2(1-p)^2}{p^2(2-p)^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2(2-p)^2} (14-20p+9p^2-p^3 - (1-p)(3-p)^2) \\ &= \frac{1-p}{p^2(2-p)^2} (14-20p+9p^2-p^3 - (1-p)(9-6p+p^2)) \\ &= \frac{1-p}{p^2(2-p)^2} (14-20p+9p^2-p^3 - (9-15p+7p^2-p^3)) \\ &= \frac{1-p}{p^2(2-p)^2} (5-5p+2p^2) \end{aligned}$$

Exercice 2 (Centrale 2023)

On dispose de $p+1$ urnes numérotées de 0 à p .

L'urne numéro j contient j boules rouges et $p-j$ boules noires.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On tire au sort une urne et ensuite on effectue n tirages avec remise dans cette urne.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X_n et son espérance.
2. Déterminer pour $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} P(X_n = k)$

Correction

1. On note N le numéro de l'urne tirée au sort.

N suit la loi uniforme sur $\llbracket 0; p \rrbracket$.

La loi de X_n conditionnellement à $N = j$ est la loi binomiale de paramètres n et $\frac{j}{p}$.

$X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((N = j))_{0 \leq j \leq p}$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad P(X_n = k) &= \sum_{j=0}^p P(X_n = k \mid N = j) \times P(N = j) \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{n}{k} \left(\frac{j}{p}\right)^k \left(1 - \frac{j}{p}\right)^{n-k} \times \frac{1}{p+1} \\ &= \frac{1}{(p+1)p^n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^p j^k (p-j)^{n-k} \end{aligned}$$

Je ne pense pas qu'on puisse donner une expression simplifiée de cette somme dans le temps imparti. Par exemple pour $k = n$, on a :

$$P(X_n = n) = \frac{1}{(p+1)p^n} \sum_{j=0}^p j^n$$

et le calcul de la somme n'est pas trivial.

Passons au calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^p k \binom{n}{k} \left(\frac{j}{p}\right)^k \left(1 - \frac{j}{p}\right)^{n-k} \frac{1}{p+1} \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \left(\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \left(\frac{j}{p}\right)^k \left(1 - \frac{j}{p}\right)^{n-k} \right) \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \frac{nj}{p} \text{ espérance d'une loi binomiale} \\ &= \frac{1}{p+1} \frac{n}{p} \frac{p(p+1)}{2} = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

ce qu'on aurait pu intuitiver par un argument de symétrie.

2. On fixe n et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \times \frac{p}{p+1} \times \frac{1}{p} \sum_{j=0}^p \left(\frac{j}{p}\right)^k \left(1 - \frac{j}{p}\right)^{n-k}$$

Avec les sommes de Riemann, on obtient :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$$

Reste à calculer l'intégrale.

On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx &= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} (1-x)^{n-k} \right]_0^1 + \frac{n-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx \\ &= \frac{n-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx\end{aligned}$$

et on recommence.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx &= \frac{(n-k)(n-k-1)\dots 1}{(k+1)(k+2)\dots n} \int_0^1 x^n dx \\ &= (n-k)! \times \frac{k!}{n!} \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{k}} \times \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \lim_{p \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice 3 (Mines 2023)

1. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .
Déterminer sa série génératrice.
2. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $U = Y + Z$ suive la loi binomiale de paramètres n et p .
Montrer que Y et Z suivent également des lois binomiales.
3. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .
Soient l et m deux entiers tels que $P(U = l) > 0$, $P(U = m) > 0$ et $m \geq l + 3$.
Soient $Y = \left\lfloor \frac{U}{2} \right\rfloor$ et $Z = \left\lfloor \frac{U+1}{2} \right\rfloor$.
(a) Montrer que Y et Z ne sont pas indépendantes.
(b) ?

Correction

1. C'est du cours.
 $\forall t \in \mathbb{R} \quad G_Y(t) = (1 - p + pt)^n$
2. $U(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et Y et Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$ sont inclus dans $\llbracket 0; n \rrbracket$.
On en déduit que G_Y et G_Z sont polynômiales.
 Y et Z sont indépendantes donc $G_U = G_Y \times G_Z$ (l'examinatrice a demandé de démontrer cette formule, c'est du cours).
Si z est une racine complexe de G_Y alors z est racine de G_U donc $z = \frac{p-1}{p}$.
D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}^*$ tels que :
 $\forall t \in \mathbb{R} \quad G_Y(t) = a \left(t - \frac{p-1}{p} \right)^k$
Mais $G_Y(1) = 1$ donc $a = \frac{1}{\left(1 - \frac{p-1}{p} \right)^k} = p^k$
On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_Y(t) = (pt + 1 - p)^k$$

Donc Y suit la loi binomiale de paramètres k et p (si $k = 0$ alors Y est presque sûrement constante égale à 0).

Y et Z jouant des rôles symétriques, Z suit la loi binomiale de paramètres l et p .

$E(U) = E(Y) + E(Z)$ donne $np = kp + lp$ donc $l = n - k$.

3. (a) Supposons Y et Z indépendantes.

$$Y + Z = \frac{U}{2} + \frac{U}{2} = U \text{ si } U \text{ est pair.}$$

$$Y + Z = \frac{U-1}{2} + \frac{U+1}{2} = U \text{ si } U \text{ est impair.}$$

Donc $Y \sim \mathcal{B}(k, p)$ et $Z \sim \mathcal{B}(n-k, p)$ avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Or $Y \leq Z$ donc $P((Y=1) \cap (Z=0)) = 0$.

Donc $P(Y=1)P(Z=0) = 0$.

Mais $P(Z=0) = (1-p)^{n-k} > 0$ (on suppose $p \in]0; 1[$) donc $P(Y=1) = 0$.

Donc $k = 0$ et $Y = 0$ ps.

Donc $U \in \{0; 1\}$ ps.

Donc $n = 1$.

Réciproquement si $n = 1$, U suit en fait une loi de Bernoulli de paramètre p .

$Y = 0$ ps et $Z = U$.

Z et Y sont bien indépendantes dans ce cas :

$$\begin{aligned} \forall (y, z) \in Y(\Omega) \times Z(\Omega) = \{0\} \times \{0; 1\} \quad P(Y=y, Z=z) &= P(Z=z) \\ &= P(Y=y)P(Z=z) \end{aligned}$$

(b)

Exercice 4 (Mines 2023)

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ non presque sûrement constantes, indépendantes, de même loi possédant une espérance.

$$\text{Soit } R \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \omega \mapsto R_{CV} \left(\sum_{n \geq 0} X_n(\omega) z^n \right) \end{cases}.$$

Montrer que $(R > 1) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X_n(\omega) = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}$.

En déduire $P(R > 1) = 0$.

3. Soit $c < 1$.

Montrer que $P(R \leq c) = 0$.

4. En déduire que $P(R = 1) = 1$.

Correction

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est la borne supérieure, éventuellement infinie, de $\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tq la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée.}\}$

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$R_{CV} \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) > 1 \iff \exists r > 1 \text{ tq } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

ou encore :

$$R_{CV} \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) > 1 \iff \exists (M, r) \in \mathbb{R}_+^* \times]1; +\infty[\text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M r^{-n}$$

On suppose l'évènement $(R > 1)$ réalisé. En d'autres termes on considère $\omega \in \Omega$ tq $R(\omega) > 1$.

$$\exists (M(\omega), r(\omega)) \in \mathbb{R}_+^* \times]1; +\infty[\text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad |X_n(\omega)| \leq M(\omega) r(\omega)^{-n}$$

$$M(\omega) r(\omega)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc :}$$

$$\exists n_0(\omega) \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0(\omega) \quad M(\omega) r(\omega)^{-n} < 1$$

On a alors :

$$\forall n \geq n_0(\omega) \quad X_n(\omega) = 0$$

La réciproque est triviale : si les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang alors la série entière est en fait un polynôme et son rayon de convergence est infini.

$$(R > 1) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X_n(\omega) = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}.$$

$$\text{On a alors } (R > 1) = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n=n_0}^{+\infty} (X_n = 0).$$

$$\text{On note } p = P(X_n = 0) < 1.$$

$$\forall N \geq n_0 \quad P \left(\bigcap_{n=n_0}^N (X_n = 0) \right) = p^{N-n_0+1} \text{ par indépendance et équidistribution.}$$

On en déduit par continuité décroissante :

$$P \left(\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} (X_n = 0) \right) = 0$$

Par sous-additivité, $P(R > 1) = 0$.

Remarque

On peut montrer $P(R > 1) = 0$ sous des hypothèses beaucoup plus faibles.

Il suffit qu'il existe $a \neq 0$ tel que $P(X = a) > 0$ (où X désigne une variable aléatoire de même loi que les X_n).

Les évènements $(X_n = a)$ sont mutuellement indépendants et la série de terme général $P(X_n = a)$ diverge (grossièrement) donc d'après le second lemme de Borel-Cantelli, l'évènement $(X_n = a)$ est réalisé presque sûrement une infinité de fois. Donc la suite $(X_n 1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 avec probabilité 1.

Donc $P(R \leq 1) = 1$.

3. Soit $d \in]c; 1[$.

$$(R \leq c) \subset ((X_n d^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (|X_n d^n| \geq k)$$

Si on note $M = E(|X_n|) = E(X_n)$ (indépendant de n) alors avec l'inégalité de Markov :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad P(|X_n d^n| \geq k) \leq \frac{m d^n}{k}$$

Par sous-additivité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (|X_n d^n| \geq k) \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m d^n}{k} = \frac{m}{k(1-d)}$$

$$\text{Par continuité décroissante : } P \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (|X_n d^n| \geq k) \right) = 0$$

Par croissance de P , $P(R \leq c) = 0$.

Remarque

On peut ici aussi utiliser Borel-Cantelli.

On suppose que la série de terme général $P(|X_n d^n| \geq 1)$ converge.

C'est le cas en particulier si X a une espérance, via l'inégalité de Markov.

D'après le premier lemme de Borel-Cantelli, on peut affirmer avec probabilité 1 qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers tels que $|X_n d^n| \geq 1$.

Donc la suite $(X_n d^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée avec probabilité 1.

Donc $P(R \geq d) = 1$ et $P(R \leq c) \leq P(R < d) = 0$.

4. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P\left(1 - \frac{1}{n} < R \leq 1\right) = 1$$

Par continuité décroissante, $P(R = 1) = 1$.

Exercice 5 (Centrale 2023)

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi géométrique de paramètre p .

Soit $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Calculer $P(X_1 \leq k)$.

Rappeler $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

2. Calculer $P(M_n > k)$.

3. Ecrire une fonction Python `Esp(p,n)` qui effectue 10^3 simulations de M_n et qui donne une valeur approchée de l'espérance de M_n .

On utilisera la formule $E(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(M_n > k)$.

4. Ecrire une fonction Python qui calcule $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

5. Tracer sur un même graphique $(E(M_n))_{1 \leq n \leq 50}$, $\left(\frac{-H_n}{\ln(1-p)}\right)_{1 \leq n \leq 50}$ et $\left(\frac{-H_n}{\ln(1-p)} + 1\right)_{1 \leq n \leq 50}$ pour $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ et faire une conjecture.

6. Montrer que $E(M_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n\right) dt$

Il restait au moins 5 questions.

Je propose la restitution suivante :

7. Montrer : $\int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) dt \leq E(M_n) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) dt$

8. A l'aide du changement de variable $x = (1-p)^t$, montrer :

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) dt = \frac{-H_n}{\ln(1-p)}$$

9. Conclure.

Correction

1. $P(X_1 \leq 0) = 0$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X_1 \leq k) &= \sum_{l=1}^k P(X_1 = l) = \sum_{l=1}^k pq^{l-1} \\ &= p \sum_{l=0}^{k-1} q^l = p \frac{1 - q^k}{1 - q} \\ &= 1 - (1 - p)^k \end{aligned}$$

Cette formule est donc encore valable pour $k = 0$.

$$E(X_1) = \frac{1}{p}, \quad V(X_1) = \frac{q}{p^2}$$

2.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad P(M_n > k) &= 1 - P(M_n \leq k) = 1 - P\left(\bigcap_{l=1}^n (X_l \leq k)\right) \\ &= 1 - \prod_{l=1}^n P(X_l \leq k) \text{ par indépendance} \\ &= 1 - P(X_1 \leq k)^n \text{ car } X_k \text{ a la même loi que } X_1 \\ &= 1 - \left(1 - (1 - p)^k\right)^n \end{aligned}$$

3. Le programme qui suit a deux mérites : il marche et il est rapide à écrire. Par contre, sa complexité n'est pas optimale.

```
import numpy.random as rd
```

```
def Esp(p,n):
    N=10**3
    listeM=[]
    for i in range (N):
        X=rd.geometric(p,n)
        M=max(X)
        listeM.append(M)
    Maxi=max(listeM)
    ep=0
    for k in range(Maxi):
        c=0
        for l in range(N):
            if listeM[l]>k:
                c+=1
        ep+=c/N
    return(ep)
```

4.

```
def H(n):
    return sum(1/k for k in range(1,n+1))
```

5. Le code suivant répond à la question :

```
p=.75
N=50
```

```

les_x=[n for n in range(1,N+1)]
les_y=[Esp(p,n) for n in range(1,N+1)]
les_z=[-H(n)/np.log(1-p) for n in range(1,N+1)]
les_zz=[-H(n)/np.log(1-p)+1 for n in range(1,N+1)]
plt.plot(les_x,les_y,color='red')
plt.plot(les_x,les_z,color='black')
plt.plot(les_x,les_zz,color='black')

```

Je n'ai pas pris la peine d'inclure les dessins. La courbe en rouge est comprise entre les deux courbes en noir. On conjecture donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{-H_n}{\ln(1-p)} \leq E(M_n) \leq \frac{-H_n}{\ln(1-p)} + 1$$

Comme (H_n) diverge vers $+\infty$, on en déduit $E(M_n) \sim \frac{-H_n}{\ln(1-p)}$.

Enfin, on a très classiquement $H_n \sim \ln(n)$ donc on aboutira à $E(M_n) \sim \frac{-\ln(n)}{\ln(1-p)}$.

6. Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 1 - \left(1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n \end{cases}$.

f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (mais elle n'est pas continue).

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^k f(t) dt &= \sum_{l=0}^{k-1} \int_l^{l+1} f(t) dt = \sum_{l=0}^{k-1} \int_l^{l+1} \left(1 - \left(1 - (1-p)^l\right)^n\right) dt \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} P(M_n > l) \end{aligned}$$

On n'a pas encore justifié que M_n avait une espérance. M_n étant à valeurs entières positives, il suffit de prouver que la série de terme général $P(M_n > k)$ converge.

Lorsque k tend vers $+\infty$, $(1-p)^k$ converge vers 0 donc :

$$P(M_n > k) = 1 - \left(1 - n(1-p)^k + o\left((1-p)^k\right)\right) = n(1-p)^k + o\left((1-p)^k\right) \sim n(1-p)^k$$

On en déduit que la série $\sum_{k \geq 0} P(M_n > k)$ converge.

On déduit alors du début de cette question :

$$\int_0^k f(t) dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} E(M_n)$$

f étant à valeurs positives, on en déduit classiquement que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et :

$$E(M_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n\right) dt$$

7. $\forall t \in \mathbb{R} \quad t-1 \leq \lfloor t \rfloor \leq t$

$p \in]0; 1[$ donc $\ln(1-p) < 0$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (t-1) \ln(1-p) \geq \lfloor t \rfloor \ln(1-p) \geq t \ln(1-p)$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (1-p)^{t-1} \geq (1-p)^{\lfloor t \rfloor} \geq (1-p)^t$$

puis :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 1 - (1-p)^{t-1} \leq 1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor} \leq 1 - (1-p)^t$$

Si $t \geq 1$, tout est positif et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\forall t \geq 1 \quad \left(1 - (1-p)^{t-1}\right)^n \leq \left(1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n \leq \left(1 - (1-p)^t\right)^n$$

D'où on tire :

$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) dt \leq \int_1^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n\right) dt \leq \int_1^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^{t-1}\right)^n\right) dt$$

Dans l'intégrale de droite, on fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone

$s = t - 1$ et on a :

$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) dt \leq \int_1^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n\right) dt \leq \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) dt$$

Pour t compris entre 0 et 1, on a :

$$1 - (1-p)^{t-1} \leq 0 \leq 1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor} \leq 1 - (1-p)^t$$

Donc on écrit :

$$0 \leq \left(1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n \leq \left(1 - (1-p)^t\right)^n$$

D'où :

$$1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n \leq 1 - \left(1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n \leq 1$$

On en déduit :

$$\int_0^1 \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) dt \leq \int_0^1 \left(1 - \left(1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n\right) dt \leq 1$$

et on conclut facilement.

8. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant.

$$x = (1-p)^t \text{ donne } t = \frac{\ln(x)}{\ln(1-p)} \text{ puis } dt = \frac{dx}{x \ln(1-p)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) dt &= \int_1^0 (1 - (1-x)^n) \frac{dx}{x \ln(1-p)} \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{1 - (1-x)} dx \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k dx \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-x)^k dx \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{-(1-x)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{-H_n}{\ln(1-p)} \end{aligned}$$

9. Cf les remarques à la fin de la question 5.

Exercice 6 (Ens 2023)

On considère n points deux à deux distincts du plan ($n \geq 3$).

Soit E l'ensemble des parties $\llbracket 1; n \rrbracket$ de cardinal 2.

On considère une famille $(X_e)_{e \in E}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

Si $X_e = 1$ alors on trace le segment joignant les points d'indice i et j où $e = \{i; j\}$.

Soient T_n le nombre de triangles et $a_n = p^3 \binom{n}{3}$.

Montrer que :

$$\forall \epsilon > 0 \ P \left(\left| \frac{T_n}{a_n} - 1 \right| > \epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Correction

Luisa a commencé par chercher la loi de T_n . L'examineur l'a arrêté et lui a demandé de chercher autre chose : l'espérance.

Il s'agit typiquement d'écrire T_n comme une somme d'indicateurs et d'utiliser la linéarité de l'espérance.

Soit F l'ensemble des parties $\llbracket 1; n \rrbracket$ de cardinal 3.

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{\{i,j,k\} \in F} 1_{X_{\{i,j\}}=1 \text{ et } X_{\{j,k\}}=1 \text{ et } X_{\{k,i\}}=1} \\ &= \sum_{\{i,j,k\} \in F} 1_{X_{\{i,j\}}=1} \times 1_{X_{\{j,k\}}=1} \times 1_{X_{\{k,i\}}=1} \\ &= \sum_{\{i,j,k\} \in F} X_{\{i,j\}} X_{\{j,k\}} X_{\{k,i\}} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{\{i,j,k\} \in F} E(X_{\{i,j\}} X_{\{j,k\}} X_{\{k,i\}}) \text{ par linéarité} \\ &= \sum_{\{i,j,k\} \in F} E(X_{\{i,j\}}) \times E(X_{\{j,k\}}) \times E(X_{\{k,i\}}) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{\{i,j,k\} \in F} p \times p \times p = p^3 \text{Card}(F) \\ &= p^3 \binom{n}{3} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \ P \left(\left| \frac{T_n}{a_n} - 1 \right| > \epsilon \right) &= P(|T_n - a_n| > a_n \epsilon) \\ &= P(|T_n - E(T_n)| > a_n \epsilon) \\ &\leq \frac{V(T_n)}{a_n^2 \epsilon^2} \end{aligned}$$

$$a_n = p^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \sim \frac{p^3 n^3}{6}.$$

Il s'agit donc de montrer que $V(T_n) = o(n^6)$.

Or :

$$V(T_n) = \sum_{\{i,j,k\} \in F} V(X_{\{i,j\}} X_{\{j,k\}} X_{\{k,i\}}) + \sum_{\{i_1,j_1,k_1\} \times \{i_2,j_2,k_2\} \in F^2} \text{Cov}(X_{\{i_1,j_1\}} X_{\{j_1,k_1\}} X_{\{k_1,i_1\}}, X_{\{i_2,j_2\}} X_{\{j_2,k_2\}} X_{\{k_2,i_2\}})$$

Cela donne une somme de $N + N(N-1)$ termes où $N = \binom{n}{3}$ est le cardinal de F .

Cela fait $N^2 \sim \frac{n^6}{36}$ termes : c'est trop. En fait si $\{i_1, j_1, k_1\}$ et $\{i_2, j_2, k_2\}$ sont disjoints ou ont un seul point en commun alors les variables aléatoires $X_{\{i_1,j_1\}} X_{\{j_1,k_1\}} X_{\{k_1,i_1\}}$ et $X_{\{i_2,j_2\}} X_{\{j_2,k_2\}} X_{\{k_2,i_2\}}$ sont indépendantes et leur covariance est nulle.

Il reste donc dans la somme de droite les termes pour lesquels $\{i_1, j_1, k_1\} \cap \{i_2, j_2, k_2\}$ est de

cardinal 2.

Cela donne $N_2 = \binom{n}{3} \times 3 \binom{n-3}{1} \sim \frac{n^4}{2}$ termes.

La variance de T_n qui est égale à

$$NV \left(X_{\{1,2\}} X_{\{2,3\}} X_{\{3,1\}} \right) + N_2 Cov \left(X_{\{1,2\}} X_{\{2,3\}} X_{\{3,1\}}, X_{\{1,2\}} X_{\{2,4\}} X_{\{4,1\}} \right)$$

est donc en $O(n^4)$.

Exercice 7 (X 2023)

1. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh(x) \leq e^{x^2/2}$$

2. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $P(|S_n| \geq \lambda) \leq 2e^{-\lambda^2/(2n)}$

Correction

$$1. \forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

avec pour $n \geq 1$, $(2n)! = \prod_{i=1}^{2n} i \geq \prod_{i=1}^n 2i = 2^n n!$.

C'est vrai également pour $n = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$$

2. L'inégalité est triviale pour $\lambda = 0$ car à gauche on a une probabilité et à droite 2.

Soit $\lambda > 0$.

Soit $t > 0$, à choisir plus tard en fonction de λ .

$$\begin{aligned} P(S_n \geq \lambda) &= P(tS_n \geq t\lambda) = P(e^{tS_n} \geq e^{t\lambda}) \\ &\leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{t\lambda}} = e^{-t\lambda} E\left(e^{\sum_{k=1}^n tX_k}\right) = e^{-t\lambda} E\left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\right) \\ &\leq e^{-t\lambda} \prod_{k=1}^n E(e^{tX_k}) \text{ par indépendance} \\ &\leq e^{-t\lambda} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}\right) \text{ par le théorème de transfert} \\ &\leq e^{-t\lambda} (\cosh(t))^n \\ &\leq e^{-t\lambda + nt^2/2} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto -t\lambda + nt^2/2 \end{cases}.$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f'(t) = -\lambda + nt.$$

On en déduit que f est minimale en $t = \frac{\lambda}{n}$.

$$f\left(\frac{\lambda}{n}\right) = -\frac{\lambda^2}{n} + \frac{\lambda^2}{2n} = -\frac{\lambda^2}{2n}$$

Donc $P(S_n \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^2/(2n)}$

$$-S_n = -\sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n (-X_k)$$

$(-X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.

Donc $-S_n$ a la même loi que S_n .

Donc :

$$P(S_n \leq -\lambda) = P(-S_n \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^2/(2n)}$$

On conclut avec $(|S_n| \geq \lambda) = (S_n \geq \lambda) \cap (S_n \leq -\lambda)$ (union disjointe si $\lambda > 0$).

Exercice 8 (X 2023)

Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

On considère un dé à n faces numérotées de 1 à n et un dé à m faces numérotées de 1 à m qu'on jette simultanément.

Peut-on les piper pour que la somme des points obtenus sur les deux dés suivent une loi uniforme ?

Correction

Soit Z le résultat du dé à n faces et Y celui du dé à m faces.

On considère qu'on peut fixer arbitrairement la distribution de probabilité de Z et de Y :

$$p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=1}^n p_k = 1, \text{ pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(Z = k) = p_k$$

$$q_1, \dots, q_m \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=1}^m q_k = 1, \text{ pour tout } k \in \llbracket 1; m \rrbracket, P(Y = k) = q_k$$

On suppose que $Z + Y$ suit la loi uniforme sur $\llbracket 2; n + m \rrbracket$.

Z et Y sont indépendantes donc $G_{Z+Y} = G_Z G_Y$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G_Z(x) = \sum_{k=1}^n p_k x^k$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G_Y(x) = \sum_{k=1}^m q_k x^k$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G_{Z+Y}(x) = \sum_{k=2}^{n+m} \frac{1}{n+m-1} x^k$$

On a donc une égalité entre polynômes :

$$\sum_{k=2}^{n+m} \frac{1}{n+m-1} X^k = \left(\sum_{k=1}^n p_k X^k \right) \left(\sum_{k=1}^m q_k X^k \right)$$

Le coefficient de X^{n+m} donne $\frac{1}{n+m-1} = p_n q_m$ donc $p_n > 0$ et $q_m > 0$

Si n est pair, $n-1$ est impair et le polynôme $\sum_{k=1}^n p_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} p_{l+1} X^l$ a au moins une racine réelle (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires).

Par conséquent, le polynôme $P = \sum_{k=1}^n p_k X^k$ a au moins deux racines réelles (comptées avec leurs

multiplicités).

De même si m est pair, $Q = \sum_{k=1}^m q_k X^k$ a au moins deux racines réelles (comptées avec leurs multiplicités).

Donc si n et m sont tous les deux pairs, le polynôme de droite a au moins 4 racines réelles (comptées avec leurs multiplicités).

Mais à gauche, $\sum_{k=2}^{n+m} \frac{1}{n+m-1} X^k = \frac{X^2(X^{n+m-1}-1)}{(n+m-1)(X-1)}$ a une seule racine réelle : 0 de multiplicité 2 donc on aboutit à une contradiction.

Le cas de deux dés à 6 faces est donc réglé.

Mais je ne vois pas comment traiter les autres cas par cette méthode.

On revient au cas général (on ne suppose plus rien sur la parité de n et de m).

Le coefficient de X^{n+1} donne $p_n q_1 + p_{n-1} q_2 + \dots + p_1 q_n = \frac{1}{n+m-1}$ avec la convention $q_l = 0$ si $l > m$.

Donc $p_n q_m = p_n q_1 + p_{n-1} q_2 + \dots + p_1 q_n \geq p_n q_1$ et $q_m \geq q_1$.

De même $p_n \geq p_1$.

Le coefficient de X^2 donne $p_1 q_1 = \frac{1}{n+m-1}$

Donc $p_1 q_1 = p_n q_m$ avec $0 < p_1 \leq p_n$ et $0 < q_1 \leq q_m$

Donc $p_1 = p_n$ et $q_1 = q_m$.

Donc $p_n q_1 = p_n q_m = p_n q_1 + p_{n-1} q_2 + \dots + p_1 q_n$

On en déduit $p_{n-1} q_2 + \dots + p_1 q_n = 0$ puis $p_{n-1} q_2 = \dots = p_1 q_n = 0$.

Si on ajoute l'hypothèse : $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m > 0$ ie il n'y a aucune face presque sûrement impossible, on a aboutit à une contradiction.

Par contre si les p_i et les q_j peuvent être nuls c'est possible :

$$\frac{X^{15}-1}{X-1} = \frac{X^{15}-1}{X^5-1} \times \frac{X^5-1}{X-1}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{14} X^k = (1 + X^5 + X^{10}) \times (1 + X + X^2 + X^3 + X^4)$$

Avec $n = 11$ et $m = 5$ on a $n + m - 1 = 15 = 3 \times 5$ donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+m} \frac{1}{n+m-1} X^k &= \frac{1}{15} \sum_{k=2}^{16} X^k = \frac{1}{15} (X + X^6 + X^{11}) \times (X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5) \\ &= \left(\frac{1}{3} X + \frac{1}{3} X^6 + \frac{1}{3} X^{11} \right) \times \left(\frac{1}{5} X + \frac{1}{5} X^2 + \frac{1}{5} X^3 + \frac{1}{5} X^4 + \frac{1}{5} X^5 \right) \end{aligned}$$

Essayons d'obtenir tous les cas possibles.

Les facteurs irréductibles de $\frac{P}{X}$ et de $\frac{Q}{X}$ sont de la forme $X + 1$ ou $X^2 - aX + 1$ (les racines complexes non réelles de P et de Q sont de module 1).

$$X \left(\frac{1}{X} + 1 \right) = X + 1 \text{ et } X^2 \left(\frac{1}{X^2} - a \frac{1}{X} + 1 \right) = 1 - aX + X^2$$

$$\text{Donc } X^{n-1} \frac{P\left(\frac{1}{X}\right)}{1/X} = \frac{P(X)}{X}.$$

On en déduit : $X^{n+1}P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)$ ie $\sum_{k=1}^n p_k X^{n+1-k} = \sum_{k=1}^n p_k X^k$ ou encore

$$\sum_{k=1}^n p_{n+1-k} X^k = \sum_{k=1}^n p_k X^k \text{ puis :}$$

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad p_{n+1-k} = p_k$$

De même :

$$\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad q_{m+1-k} = q_k$$

$p_{n-1}q_2 = 0$ donc $p_{n-1} = 0$ ou $q_{m-1} = 0$.

On peut supposer sans perte de généralité que $p_{n-1} = 0$.

Le coefficient de X^{n+m-1} est $p_{n-1}q_m + p_n q_{m-1} = p_n q_m$ donc $q_{m-1} = q_m$.

$p_{n-2}q_3 = 0$ donc $p_{n-2} = 0$ ou $q_3 = 0$.

Si $p_{n-2} = 0$ alors $q_{m-2} = q_m$

On aboutit donc à $P = p_1 X + p_l X^l + \dots + p_{n+1-l} X^{n+1-l} + p_n X^n$ et $Q = q_1 X + \dots + q_1 X^{l-1} + 0X^l + \dots + 0X^{m+1-l} + q_1 X^{m+2-l} \dots + q_m X^m$

Quand on fait le produit PQ , $p_1 X Q$ contribue pour $\frac{1}{n+m-1} (X^2 + \dots + X^l + 0X^{l+1} + \dots + 0X^{m+2-l} + q_1 X^{m+1-l} + \dots)$

La seule contribution à X^{l+1} vient de $p_l X^l$ donc $p_l = p_1$.

Comme il ne doit pas y avoir de chevauchement entre $p_1 X Q$, $p_l X^l Q$ et les autres on a :

$$Q = q_1 (X + \dots + X^m) = q_1 X \frac{X^{m-1} - 1}{X - 1}$$

$$\text{et } P = p_1 X (1 + X^m + X^{2m} + \dots + X^{n-1})$$

Il apparaît donc nécessaire que $n-1$ soit un multiple de m (si $m \leq n-1$).

On retrouve l'exclusion du cas n et m pairs.

Réciproquement, si $n-1 = km$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+m-1} \sum_{k=2}^{n+m} X^k &= \frac{1}{n+m-1} X^2 \frac{X^{n+m-1} - 1}{X - 1} \\ &= \frac{1}{(k+1)m} X^2 \frac{X^{(k+1)m} - 1}{X - 1} \\ &= \frac{1}{(k+1)m} X^2 \frac{X^{(k+1)m} - 1}{X^m - 1} \frac{X^m - 1}{X - 1} \\ &= \left(\frac{1}{k+1} (X + X^{m+1} + \dots + X^{km+1=n}) \right) \times \left(\frac{1}{m} (X + X^2 + \dots + X^m) \right) \end{aligned}$$

La réponse est donc :

oui si et seulement si m divise $n-1$ (en supposant sans perte de généralité $m \leq n$)