Révisions 2025
Eléments propres d'un endomorphisme
2 juin 2025

941

Exercice 1 *(CCP 2023)*

Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+4} - 2u_{n+3} - 11u_{n+2} + 12u_{n+1} + 36u_n = 0\right\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Soit $\varphi \begin{cases} E \to \mathbb{R}^4 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2, u_3) \end{cases}$.
   Montrer que φ est un isomorphisme.
   Donner la dimension de E.
3. Montrer que l'application $T : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de E.
4. Montrer que $T^4 - 2T^3 - 11T^2 + 12T + 36id_E = 0$.
   Montrer que $(T - 3id_E)^2 \circ (T + 2id_E)^2 = 0$.
5. Donner les valeurs propres possibles de T.
6. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
   Est-ce que T est diagonalisable ?
7. Montrer :
   - $\text{Ker}\left((T - 3id_E)^2\right) \cap \text{Ker}\left((T + 2id_E)^2\right) = \{0\}$
   - $\text{Im}\left((T + 2id_E)^2\right) \subset \text{Ker}\left((T - 3id_E)^2\right)$
   - $E = \text{Ker}\left((T - 3id_E)^2\right) \oplus \text{Ker}\left((T + 2id_E)^2\right)$
8. Donner une base de E.

Exercice 2 *(CCP 2023)*

Soit $(E) : y'' + y' + y = 0$.
Soit F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et solutions de (E).

1. Résoudre (E).
2. (a) Soit $\varphi_c \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{cases}$ et $\varphi_s \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{cases}$.
   Montrer que φ_c et φ_s sont solutions de (E).
   Donner les zéros de φ_c et les zéros de φ_s.
   (b) φ_c et φ_s sont-elles développables en série entière ?
3. Soit $D : f \in F \mapsto f'$.
   (a) D est-elle un endomorphisme de F ?

(b) D est-elle diagonalisable ? Que vaut D^3 ?

4. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Soit $T_a : f \in F \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a+x) \end{cases}$.
   T_a est-elle un endomorphisme de F ?
   Donner les valeurs de a telles que T_a soit diagonalisable.
5. ?

Exercice 3 *(CCP 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A$ et (A, I_n) libre.
On considère $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ f(M) = AM$

1. Déterminer $f^2 = f \circ f$.
2. f est-elle diagonalisable ? Trouver son spectre.

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Soit $f \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$

1. Calculer $f(M)$ où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
2. f est-elle diagonalisable ?
   Valeurs propres de f ?, sous-espaces propres associés ? polynôme caractéristique ?
3. Mêmes questions avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Exercice 5 *(Centrale Psi 2024)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E.
On dit que u est cyclique si, et seulement si, il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
On prend $E = \text{Vect}(1, \cos, \sin)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u la dérivation.
Montrer que u est un endomorphisme cyclique non diagonalisable de E.

Exercice 6 *(d'après Ens 2024)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit a un endomorphisme diagonalisable de E.
Soit $u \in E$ non nul et $V = \text{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k \in \mathbb{N}}\right)$.
Montrer que l'endomorphisme induit par a sur V n'a que des valeurs propres simples.

Exercice 7 *(Mines 2023)*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.
Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ qui possèdent une valeur propre commune.
Montrer qu'il existe $\phi \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 telle que $f \circ \phi = \phi \circ g$.