

Révisions 2025
Éléments propres d'un endomorphisme
2 juin 2025

941

Exercice 1 (CCP 2023)

Soit $E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+4} - 2u_{n+3} - 11u_{n+2} + 12u_{n+1} + 36u_n = 0 \right\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Soit $\varphi \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2, u_3) \end{cases}$.
Montrer que φ est un isomorphisme.
Donner la dimension de E .
3. Montrer que l'application $T : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est un endomorphisme de E .
4. Montrer que $T^4 - 2T^3 - 11T^2 + 12T + 36id_E = 0$.
Montrer que $(T - 3id_E)^2 \circ (T + 2id_E)^2 = 0$.
5. Donner les valeurs propres possibles de T .
6. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de T .
Est-ce que T est diagonalisable ?
7. Montrer :
 - $\text{Ker}((T - 3id_E)^2) \cap \text{Ker}((T + 2id_E)^2) = \{0\}$
 - $\text{Im}((T + 2id_E)^2) \subset \text{Ker}((T - 3id_E)^2)$
 - $E = \text{Ker}((T - 3id_E)^2) \oplus \text{Ker}((T + 2id_E)^2)$
8. Donner une base de E .

Correction

1. On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
 - La suite nulle appartient à E .
 - E est stable par combinaisons linéaires.
Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de E .
Soit λ et μ deux réels.
Soit $w = \lambda u + \mu v$.

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} \ w_{n+4} - 2w_{n+3} - 11w_{n+2} + 12w_{n+1} + 36w_n \\ &= \lambda(u_{n+4} - 2u_{n+3} - 11u_{n+2} + 12u_{n+1} + 36u_n) \\ & \quad + \mu(v_{n+4} - 2v_{n+3} - 11v_{n+2} + 12v_{n+1} + 36v_n) \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \end{aligned}$$

2. On vérifie facilement que φ est linéaire.

Etant donné $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, il existe une et une seule suite vérifiant la relation de récurrence et les conditions initiales $u_0 = x$, $u_1 = y$, $u_2 = z$ et $u_3 = t$.

En d'autres termes, φ est bijective.

φ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On en déduit que E a la même dimension que $\mathbb{R}^4$ ie 4.

3. Soit $u \in E$.

On note $v = T(u)$.

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+4} - 2v_{n+3} - 11v_{n+2} + 12v_{n+1} + 36v_n \\ &= u_{n+4+1} - 2u_{n+3+1} - 11u_{n+2+1} + 12u_{n+1+1} + 36u_{n+1} \\ &= u_{n+1+4} - 2u_{n+1+3} - 11u_{n+1+2} + 12u_{n+1+1} + 36u_{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $T(u) \in E$.

On vérifie ensuite facilement la linéarité de T .

4. Soit $u \in E$.

$T(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $T^2(u) = (u_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ et ainsi de suite.

$$(T^4 - 2T^3 - 11T^2 + 12T + 36id_E)(u) = (u_{n+4} - 2u_{n+3} - 11u_{n+2} + 12u_{n+1} + 36u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0$$

$$\begin{aligned} (X - 3)^2(X + 2)^2 &= (X^2 - 6X + 9)(X^2 + 4X + 4) \\ &= X^4 + 4X^3 + 4X^2 - 6X^3 - 24X^2 - 24X + 9X^2 + 36X + 36 \\ &= X^4 - 3X^3 - 11X^2 + 12X + 36 \end{aligned}$$

Donc :

$$(T - 3id_E)^2 \circ (T + 2id_E)^2 = T^4 - 2T^3 - 11T^2 + 12T + 36id_E = 0$$

5. Le polynôme $(X - 3)^2(X + 2)^2$ annule T donc le spectre de T est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme $(X - 3)^2(X + 2)^2$.

Les valeurs propres possibles de T sont donc -2 et 3 .

6. On regarde si 3 est valeur propre de T .

Soit $u \in E$.

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(T - 3id_E) &\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^n u_0 \end{aligned}$$

De plus la suite $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E :

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{n+4} - 2 \cdot 3^{n+3} - 11 \cdot 3^{n+2} + 12 \cdot 3^{n+1} + 36 \cdot 3^n \\ &= 3^n(3^4 - 2 \cdot 3^3 - 11 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 36) \\ &= 3^n(3 - 3)^2(3 + 2)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc 3 est valeur propre de T et les vecteurs propres associés sont les suites $(3^n u_0)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 \neq 0$.

On montre de même que -2 est valeur propre de T et les vecteurs propres associés sont les suites $((-2)^n u_0)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 \neq 0$.

7. La somme des dimensions des sous-espaces propres de T est 2 et E est de dimension 4 donc T n'est pas diagonalisable.
8. • Soit $u \in \text{Ker}((T - 3\text{id}_E)^2) \cap \text{Ker}((T + 2\text{id}_E)^2) = \{0\}$.
 $T^2(u) - 6T(u) + 9u = (T - 3\text{id}_E)^2(u) = 0$
 De même $T^2(u) + 4T(u) + 4u = 0$
 En faisant la différence, on obtient $-10T(u) + 5u = 0$.
 Donc $T(u) = \frac{1}{2}u$.
 Mais $\frac{1}{2}$ n'est pas valeur propre de T donc $u = 0$.
- $(T - 3\text{id}_E)^2 \circ (T + 2\text{id}_E)^2 = 0$ donc $\text{Im}((T + 2\text{id}_E)^2) \subset \text{Ker}((T - 3\text{id}_E)^2)$
 • $\text{Ker}((T - 3\text{id}_E)^2) \cap \text{Ker}((T + 2\text{id}_E)^2) = \{0\}$ donc la somme
 $\text{Ker}((T - 3\text{id}_E)^2) + \text{Ker}((T + 2\text{id}_E)^2)$ est directe.

$$\begin{aligned}
 & \dim(\text{Ker}((T - 3\text{id}_E)^2) \oplus \text{Ker}((T + 2\text{id}_E)^2)) \\
 &= \dim(\text{Ker}((T - 3\text{id}_E)^2)) + \dim(\text{Ker}((T + 2\text{id}_E)^2)) \\
 &\geq \dim(\text{Im}((T + 2\text{id}_E)^2)) + \dim(\text{Ker}((T + 2\text{id}_E)^2)) \\
 &\quad \text{d'après l'inclusion précédente} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

Donc :

$$E = \text{Ker}((T - 3\text{id}_E)^2) \oplus \text{Ker}((T + 2\text{id}_E)^2)$$

9. Pour obtenir une base de E il suffit de concaténer une base de $\text{Ker}((T - 3\text{id}_E)^2)$ et une base de $\text{Ker}((T + 2\text{id}_E)^2)$.
 $\text{Ker}((T - 3\text{id}_E)^2)$ est l'ensemble des suites de E qui vérifient également la relation de récurrence $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$.
 Mais en fait si une suite vérifie cette relation de récurrence alors elle appartient à E .
 En effet si on note $\tau : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$, on a
 $\text{Ker}((\tau - 3\text{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^2) \subset \text{Ker}((\tau - 3\text{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^2(\tau + 2\text{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^2) = E$.
 D'après le cours de sup, $\text{Ker}((T + 2\text{id}_E)^2)$ a pour base $((3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n3^n)_{n \in \mathbb{N}})$.
 Finalement, E a pour base $((3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n3^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n(-2)^n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Exercice 2 (CCP 2023)

Soit $(E) : y'' + y' + y = 0$.

Soit F le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et solutions de (E) .

1. Résoudre (E) .

2. (a) Soit $\varphi_c : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{cases}$ et $\varphi_s : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{cases}$.

Montrer que φ_c et φ_s sont solutions de (E) .

Donner les zéros de φ_c et les zéros de φ_s .

- (b) φ_c et φ_s sont-elles développables en série entière ?

3. Soit $D : f \in F \mapsto f'$.

- (a) D est-elle un endomorphisme de F ?
 (b) D est-elle diagonalisable ? Que vaut D^3 ?
 4. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Soit } T_a : f \in F \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a+x) \end{cases}.$$

T_a est-elle un endomorphisme de F ?

Donner les valeurs de a telles que T_a soit diagonalisable.

5. ?

Correction

1. L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ dont les solutions sont $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{et } j^2 = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'après le cours de Sup, la solution générale de (E) est :

$$y = e^{-t/2} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$$

2. (a) $(A, B) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$ permettent de montrer que φ_c et φ_s sont solutions de E .
 Mais on peut aller plus loin. D'après la question précédente, (φ_c, φ_s) est une famille génératrice de F . Etant clairement libre, c'est une base de F .

$$\text{Les zéros de } \varphi_c \text{ sont les nombres } \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{3}}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Les zéros de } \varphi_s \text{ sont les nombres } \frac{2}{\sqrt{3}} \times k\pi = \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}, k \in \mathbb{Z}$$

- (b) La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{jt} \end{cases}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{jt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^n t^n}{n!}$$

On en déduit que φ_c , qui est sa partie réelle, et φ_s , qui est sa partie imaginaire sont développables en série entière (avec rayon de convergence infini).

3. (a) Soit $f \in F$.
 f est a priori de classe $\mathcal{C}^2$ mais $f'' = -f - f'$, avec f de classe $\mathcal{C}^2$ et f' de classe $\mathcal{C}^1$,
 est de classe $\mathcal{C}^1$ donc f est de classe $\mathcal{C}^3$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + f'(x) + f(x) = 0$$

En dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(3)}(x) + f''(x) + f'(x) = 0$$

ie $D(f) = f' \in F$.

La linéarité de D étant claire, D est un endomorphisme de F .

- (b) Le polynôme $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annule D mais D est un endomorphisme de F qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Les valeurs propres (nécessairement réelles) de D sont racines de $X^2 + X + 1$ qui n'a pas de racine réelle.

D n'a pas de valeur propre et D n'est pas diagonalisable.

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) \text{ donc } D^3 - id_E = (D - id_E)(D^2 + D + id_E) = 0 \text{ donc } D^3 = id_E.$$

4.

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_c(t+a) &= e^{-(t+a)/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t+a)\right) \\
&= e^{-a/2} e^{-t/2} \left(\cos\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \sin\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

En d'autres termes, $T_a(\varphi_c) = e^{-a/2} \left(\cos\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \varphi_c - \sin\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \varphi_s \right)$

De même, $T_a(\varphi_s) = e^{-a/2} \left(\sin\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \varphi_c + \cos\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \varphi_s \right)$

T_a envoie une base de F dans F et T est linéaire (facile à vérifier) donc T est un endomorphisme de F .

De plus dans la base (φ_c, φ_s) de F , la matrice de T_a est :

$$e^{-a/2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) & \sin\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) & \cos\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de T_a est donc $X^2 - 2e^{-a/2} \cos\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)X + e^{-a}$.

Son discriminant est :

$$4e^{-a} \cos^2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - 4e^{-a} = -4e^{-a} \sin^2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

Si $a \neq \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$, il est strictement négatif donc T_a n'est pas diagonalisable (ni même trigonalisable).

Si $a = \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$ alors T_a est l'homothétie de rapport $(-1)^k e^{-a/2}$ donc T_a est diagonalisable.

Exercice 3 (CCP 2024)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A$ et (A, I_n) libre.

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(M) = AM$$

1. Déterminer $f^2 = f \circ f$.
2. f est-elle diagonalisable ? Trouver son spectre.

Correction

1.

$$\begin{aligned}
\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f^2(M) &= f(f(M)) = f(AM) = A(AM) = A^2M \\
&= 2AM = 2f(M)
\end{aligned}$$

Donc $f^2 = 2f$.

2. Le polynôme $X^2 - 2X = X(X - 2)$ est scindé à racines simples et annule f donc f est diagonalisable.

Le spectre de f est inclus dans l'ensemble des racines de P donc dans $\{0; 2\}$.

f est diagonalisable donc $\text{Sp}(f) \neq \emptyset$.

Supposons $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

f étant diagonalisable, on aurait $f = 0$.

En particulier $A = AI_n = f(I_n) = 0$ et (A, I_n) est liée.

C'est absurde.

Supposons $\text{Sp}(f) = \{2\}$.

f étant diagonalisable, on aurait $f = 2Id$.

En particulier $A = AI_n = f(I_n) = 2I_n$ et (A, I_n) est liée.

C'est absurde.

Finalement $\text{Sp}(f) = \{0; 2\}$.

Exercice 4 (Mines 2024)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $f \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$

1. Calculer $f(M)$ où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2. f est-elle diagonalisable ?

Valeurs propres de f ?, sous-espaces propres associés ? polynôme caractéristique ?

3. Mêmes questions avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Correction

1. $f(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} 0 = \lambda a \\ -b = \lambda b \\ c = \lambda c \\ 0 = \lambda d \end{cases}$$

• **Premier cas :** $\lambda = 0$

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ -b = 0 \\ c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff b = c = 0$$

Donc 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est le plan engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est aussi le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé par les matrices diagonales.

Dans la suite, on suppose $\lambda \neq 0$ et on a :

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} a = 0 \\ (\lambda + 1)b = 0 \\ (\lambda - 1)c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

- **Deuxième cas :** $\lambda = -1$

$$f(M) = -M \iff \begin{cases} a = 0 \\ 0 = 0 \\ -2c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \iff a = c = d = 0$$

Donc -1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on suppose $\lambda \neq -1$ (et toujours $\lambda \neq 0$) et on a : $f(M) = \lambda M \iff$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ (\lambda - 1)c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

- **Troisième cas :** $\lambda = 1$

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 0 \\ d = 0 \end{cases} \iff a = b = d = 0$$

Donc 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Quatrième cas :** $\lambda \notin \{-1; 0; 1\}$

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

λ n'est pas valeur propre de M .

f est diagonalisable : la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est formée de vecteurs propres de f . Le polynôme caractéristique de f est $X^2(X - 1)(X + 1)$ (f étant diagonalisable, multiplicités et dimensions des sous-espaces propres se confondent).

$$3. f(M) = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & a + b\alpha \\ 2c & c + \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & (2 - \alpha)b + d - a \\ (\alpha - 2)c & -c \end{pmatrix}$$

On va commencer par le cas $\alpha \neq 2$.

$$f(M) = (\alpha - 2)M \iff \begin{cases} c = (\alpha - 2)a \\ (2 - \alpha)b + d - a = (\alpha - 2)b \\ (\alpha - 2)c = (\alpha - 2)c \\ -c = (\alpha - 2)d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1}{\alpha - 2}c \\ d = -\frac{1}{\alpha - 2}c \\ 2(\alpha - 2)b + \frac{2}{\alpha - 2}c = 0 \end{cases}$$

$\alpha - 2$ est valeur propre de f , le sous-espace propre associé étant la droite dirigée par la matrice $\begin{pmatrix} \alpha - 2 & -1 \\ (\alpha - 2)^2 & -(\alpha - 2) \end{pmatrix}$.
Soit $\lambda \neq \alpha - 2$.

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} 0 = \lambda a \\ (2 - \alpha)b + d - a = \lambda b \\ c = 0 \\ 0 = \lambda d \end{cases}$$

On en déduit :

$$f(M) = 0 \iff \begin{cases} d = a + (\alpha - 2)b \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc 0 est valeur propre de f , le sous-espace propre associé étant le plan engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$.

Enfin, si $\lambda \neq 0, \alpha - 2$:

$$f(M) = \lambda M \iff \begin{cases} 0 = a \\ (2 - \alpha)b = \lambda b \\ c = 0 \\ 0 = d \end{cases}$$

On en déduit une dernière valeur propre $2 - \alpha$, le sous-espace propre associé étant la droite dirigée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On sera attentif au fait que les trois nombres $2 - \alpha = -(\alpha - 2)$, 0 et $\alpha - 2$ sont deux à deux distincts.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est 4, la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc f est diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de f est $X^2(X - (\alpha - 2))(X + (\alpha - 2))$.

On passe ensuite au cas $\alpha = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$f(M) = \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

0 est valeur propre de f , le sous-espace propre associé étant le plan engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(M) = \lambda M &\iff \begin{cases} 0 = \lambda a \\ d-a = \lambda b \\ c = 0 \\ 0 = \lambda b \end{cases} \\ &\iff a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

f n'a pas de valeur propre non nulle.

f n'est pas diagonalisable.

$\chi_f = X^4$: la matrice de f dans la base canonique est la même que celle de g $\begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$.

Donc $\chi_f = \chi_g$.

g comme f n'a pas de valeur propre non nulle.

Avec le théorème de d'Alembert-Gauss, $\chi_g = X^4$. (χ_g est un polynôme à coefficients complexes unitaire de degré 4 n'ayant que 0 comme racine possible et χ_g doit se factoriser comme un produit de 4 polynômes de degré 1)

Exercice 5 (Centrale Psi 2024)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E .

On dit que u est cyclique si, et seulement si, il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

On prend $E = \text{Vect}(1, \cos, \sin)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u la dérivation.

Montrer que u est un endomorphisme cyclique non diagonalisable de E .

Correction

La linéarité de u est celle de la dérivation.

$u(1) = 0 \in E$, $u(\cos) = -\sin \in E$ et $u(\sin) = \cos \in E$ donc u est un endomorphisme de E .

Prenons $f_0 = 1 + \cos$.

La famille $(f_0, u(f_0), u^2(f_0))$ est la famille $(1 + \cos, -\sin, -\cos)$. On ne change pas le rang de la famille en ajoutant à un de ses vecteurs une combinaison linéaire des autres donc le rang de la famille $(f_0, u(f_0), u^2(f_0))$ est égal à celui de la famille $(1, -\sin, -\cos)$, clairement égal à 3.

Donc la famille $(f_0, u(f_0), u^2(f_0))$ est une base de E et u est cyclique.

Si on veut être plus général, on prend $f = a + b \cos + c \sin$.

$u(f) = -b \sin + c \cos$ et $u^2(f) = -b \cos - c \sin$.

$$\begin{aligned} \det_{(1, \cos, \sin)}(f, u(f), u^2(f)) &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & -b \\ c & -b & -c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} c & -b \\ -b & -c \end{vmatrix} \\ &= -a(b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Donc tout $f_0 = a + b \cos + c \sin$ avec $a \neq 0$ et $(b, c) \neq (0, 0)$ convient pour montrer que u est cyclique.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$.

f est donc solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ et :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = C e^{\lambda x}$$

Mais les fonctions de E sont 2π -périodiques donc $f(0) = f(2\pi)$ et $C = C e^{2\lambda\pi}$

Si λ est un réel non nul alors $e^{2\lambda\pi} \neq 1$ et $C = 0$.

$\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est donc réduit à la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre de u .

Par contre si $\lambda = 0$ alors $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est l'ensemble des fonctions constantes (on vient d'établir une inclusion, l'autre est évidente).

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut donc 1 et u n'est pas diagonalisable.

Exercice 6 (d'après Ens 2024)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit a un endomorphisme diagonalisable de E .

Soit $u \in E$ non nul et $V = \text{Vect} \left((a^k(u))_{k \in \mathbb{N}} \right)$.

Montrer que l'endomorphisme induit par a sur V n'a que des valeurs propres simples.

Correction

On montre facilement que V est stable par a :

$$a(V) = a \left(\text{Vect} \left((a^k(u))_{k \in \mathbb{N}} \right) \right) = \text{Vect} \left((a^{k+1}(u))_{k \in \mathbb{N}} \right) = \text{Vect} \left((a^k(u))_{k \in \mathbb{N}^*} \right) \subset V$$

On note b l'endomorphisme de $\text{Vect} \left((a^k(u))_{k \in \mathbb{N}} \right)$ induit par a .

a étant diagonalisable, b l'est aussi cf le cours.

Donc il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\text{Vect} \left((a^k(u))_{k \in \mathbb{N}} \right)$ formée de vecteurs propres de b , donc de a .

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit λ_i la valeur propre de a associée à e_i .

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant la liste des valeurs propres de u comptées avec leurs multiplicités, il s'agit de prouver que ces nombres sont 2 à 2 distincts.

Le polynôme $P = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ annule b : $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(P(b)) = \text{Diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = 0$.

Soit $k \geq n$.

$$\exists (Q_k, R_k) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tq } X^k = Q_k P + R_k.$$

$$b^k = Q_k(b) \circ P(b) + R_k(b) = R_k(b) \text{ et } a^k(u) = b^k(u) = R_k(b)(u) = R_k(a)(u) \in \text{Vect}(u, a(u), \dots, a^{n-1}(u)) :$$

la famille $(u, a(u), \dots, a^{n-1}(u))$ est une famille génératrice de $\text{Vect} \left((a^k(u))_{k \in \mathbb{N}} \right)$ qui est de dimension n (c'est le cardinal d'une de ces bases).

On en déduit que la famille $(u, a(u), \dots, a^{n-1}(u))$ est une base de $\text{Vect} \left((a^k(u))_{k \in \mathbb{N}} \right)$.

Si on note $(u_1, \dots, u_n)$ les coordonnées de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ ie si $u = \sum_{k=1}^n u_k e_k$ alors le déterminant de la base $(u, a(u), \dots, a^{n-1}(u))$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ vaut :

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \dots & \lambda_n^{n-1} x_n \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \times \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \right)$$

et il est non nul.

Les λ_i sont bien deux à deux distincts.

Exercice 7 (Mines 2023)

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie.

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ qui possèdent une valeur propre commune.

Montrer qu'il existe $\phi \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 telle que $f \circ \phi = \phi \circ g$.

Correction

Soit ϕ un endomorphisme de rang 1 de E .

Son image est une droite, dirigée par un vecteur non nul u .

$\forall x \in E \exists ! a(x) \in \mathbb{C}$ tel que $\phi(x) = a(x)u$

ϕ est linéaire donc :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad a(\alpha x + \beta y)u &= \phi(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha \phi(x) + \beta \phi(y) = \alpha a(x)u + \beta a(y)u \\ &= (\alpha a(x) + \beta a(y))u \end{aligned}$$

u étant non nul :

$$\forall (x, y) \in E^2 \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad a(\alpha x + \beta y) = \alpha a(x) + \beta a(y)$$

a est donc une forme linéaire non nulle de E .

Réciproquement, si u est un vecteur non nul de E et a une forme linéaire non nulle de E ,

on définit ϕ par $\phi \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto a(x)u \end{cases}$.

On vérifie facilement que ϕ est linéaire.

a est une forme linéaire non nulle donc $a(E) = \mathbb{C}$ et $\text{Im}(u) = \mathbb{C}u$ est de dimension 1.

On se donne donc u un vecteur non nul, a une forme linéaire sur E et on définit ϕ comme ci-dessus.

$$\forall x \in E \quad (f \circ \phi)(x) = f(a(x)u) = a(x)f(u)$$

$$\forall x \in E \quad (\phi \circ g)(x) = \phi(g(x)) = a(g(x))u$$

On note λ la valeur propre commune à f et g .

Il existe $x_f \in E$ tel que $f(x_f) = \lambda x_f$ et $x_f \neq 0$.

On prend $u = x_f$.

$$\forall x \in E \quad (f \circ \phi)(x) = \lambda a(x)x_f$$

$$\forall x \in E \quad (\phi \circ g)(x) = a(g(x))x_f$$

$$\forall x \in E \quad (\phi \circ g)(x) - (f \circ \phi)(x) = a(g(x) - \lambda x)x_f$$

Or λ est valeur propre de g donc $g - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injective, donc n'est pas surjective car on est en dimension finie.

Il existe donc un hyperplan contenant l'image de $g - \lambda \text{id}_E$.

Il existe une forme linéaire non nulle a dont le noyau est cet hyperplan.

On a alors $f \circ \phi = \phi \circ g$.

Remarque

On peut également proposer une solution matricielle.

Il s'agit alors de montrer que si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont une valeur propre en commun alors il existe une matrice M de rang 1 telle que $AM = MB$.

Les matrices de rang 1 sont les matrices de la forme XY^T avec X et Y deux colonnes non nulles. On prend pour X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ (commune aux deux matrices).

$$AXY^T = \lambda XY^T$$

B et B^T ont le même polynôme caractéristique donc il existe une colonne non nulle Y telle que $B^T Y = \lambda Y$.

On a alors $Y^T B = \lambda Y^T$ puis $XY^T B = \lambda XY^T$.

A propos des matrices de rang 1

- **Rang des matrices de la forme XY^T avec X et Y deux colonnes non nulles**

X est une matrice à n lignes et une colonne et Y^T est une matrice à une ligne et n colonnes.

D'après le cours sur le produit matriciel, $M = XY^T$ est bien définie et c'est une matrice à n lignes et n colonnes.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

Toujours d'après le cours sur le produit matriciel :

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^n (X)_{i,k} (Y^T)_{k,j} = x_i y_j$$

Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes ici $(y_1 X, \dots, y_n X)$.

Ces colonnes étant toutes colinéaires à X , le rang de M est au plus 1.

Mais X est supposée non nulle donc il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x_i \neq 0$.

De même, Y est supposée non nulle donc il existe $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $y_j \neq 0$.

$m_{i,j} = x_i y_j \neq 0$ donc la matrice M n'est pas nulle et $\text{rg}(M) > 0$.

Finalement, $\text{rg}(M) = 1$.

- **Réciproque**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

M est non nulle donc une de ses colonnes est non nulle. On la note X et on note j_0 son indice :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = m_{i,j_0}$$

M étant de rang 1, la famille de ses vecteurs colonnes est de rang 1 et :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \exists y_j \in \mathbb{R} \text{ tq } C_j(M) = y_j C_{j_0}(M)$$

On a alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad m_{i,j} = (C_j(M))_i = y_j (C_{j_0}(M))_i = y_j m_{i,j_0} = y_j x_i$$

D'après les calculs précédents, $M = X Y^T$.

X est non nulle car c'est une colonne non nulle de M .

$y_{j_0} = 1$ donc Y est non nulle.