Révisions 2025
Séries de nombres
4 juin 2025

941

Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \sin(u_n)$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum u_n^3$ converge (on pourra étudier $u_{n+1} - u_n$).
3. Etudier la nature de la série $\sum u_n^2$ (on pourra étudier $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$)

Exercice 2 *(CCP PSI 2024)*

1. Rappeler le critère spécial des séries alternées.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
3. La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?

Exercice 3 *(CCP 2021)*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique. Montrer :
$\forall p \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(u_{2i-1} + u_{2i}) = \sum_{i=1}^{2p} u_i$
2. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

   Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}} \right)$.

   En déduire que $R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}} \right)$.
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$.

   Montrer que g_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée est croissante.

(b) A l'aide de l'égalité des accroissements finis, en déduire que
$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2k)^{3/2}} \leq |R_n| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2k+1)^{3/2}}$.

(c) Montrer que la série $\sum R_n$ converge.

Exercice 4 *(CCP 2019)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.
On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $v_n = \frac{u_n}{S_n}$ et $w_n = \frac{u_n}{(S_n)^a}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donner la nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$.

2. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.
(a) Que peut-on dire de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
(b) Donner un équivalent de v_n et de w_n. En déduire la nature des séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

3. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
(a) Montrer que $v_n \sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$. En déduire la nature de la série $\sum v_n$.
(b) En déduire la nature de $\sum w_n$ quand $a \leq 1$.
(c) Si $a > 1$, montrer :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \; w_n \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$
(d) En déduire la nature de $\sum w_n$ quand $a > 1$.

Exercice 5 *(CCP 2023)*

Dans tout l'exercice, a est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^a)^n}$ existe.
Dans la suite, on note $U_n(a)$ sa valeur.

2. (a) Montrer :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \; U_n(a) = na\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^a)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$
L'énoncé suggérait une intégration par parties.
(b) En déduire :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \; U_{n+1}(a) = \left(1 - \frac{1}{na}\right) U_n(a)$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n(a) = \ln(U_n(a)) + \frac{\ln(n)}{a}$.
Montrer que $W_{n+1}(a) - W_n(a) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

4. Montrer que la suite $\left(n^{1/a}U_n(a)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^*$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = U_n(2)$.
Montrer que $v_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}\lambda$ avec λ à déterminer.

6. On pose $I = U_1(3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.
   Montrer en posant $t = \dfrac{1}{x}$ que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.
   Calculer $2I$ et en déduire I.
   L'énoncé donnait $1 + x^3 = (1+x)(x^2 - x + 1)$.

Exercice 6 *(Mines 2023)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et décroissante.
On suppose $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge et que si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$.
   On pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a+kc}{b+kc}$.
   Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$.

Exercice 7 *(Mines 2023)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n^\alpha}$.
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 8 *(Centrale 2023)*

1. On définit $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$.
   Donner selon α, la nature de la série $\sum I_n(\alpha)$.
   On pensera au changement de variable $x = \tan(t)$.
2. Etudier selon α, la nature de $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$.

Exercice 9 *(Centrale 2023)*

On dit qu'une série de terme général u_n est d'ordre 1 si, et seulement si, elle converge et la série de terme général $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ converge.

On dit qu'elle est d'ordre 2 si en plus la série de terme général $R'_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k$ converge.

On définit de la même manière les ordres suivants.

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ est d'ordre 1.

2. Soit $q \in]-1;1[$.
   Montrer que la série de terme général q^n est de tout ordre.
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives telles que $u_n = O(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
   Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
   Montrer alors par récurrence sur l'ordre que si $\sum v_n$ a un ordre donné alors il en est de même pour $\sum u_n$.
4. Ecrire une fonction `reste(liste)` qui prend en entrée une liste de nombres et qui renvoie une liste L telle que $L[i] = \displaystyle\sum_{k=i}^{len(liste)} liste[i]$.
   Vérifier que `reste([1,2,3,4])` renvoie `[10,9,7,4]`.
5. Je n'ai pas l'énoncé précis de cette question. Je ne propose donc qu'une tentative de restitution.
   L'examinateur a déclaré au candidat : avec la question 4 j'ai pu évaluer Python, ce n'est pas très important pour la question 5.

```
import matplotlib.pyplot as plt
def sommes_partielles(L):
    s=0
    S=[]
    for i in range(len(L)):
        s+=L[i]
        S.append(s)
    return(S)
N=10000
les_x=[i+1 for i in  range (N)]
les_y=sommes_partielles(U)
plt.plot(les_x,les_y)
```

   affiche $u_1, u_1+u_2, \dots, u_1+\dots+u_N$ en fonction de $1,\dots,N$ et permet de conjecturer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$
   Conjecturer l'ordre de la série de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \{2,3;3;3,2\}$.
   On donne également `from scipy.special import zeta`
6. Soit $\alpha > 1$.
   Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$
7. Démontrer la conjecture de la question 5.
8. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
   Montrer que $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
   Il y avait trois questions de plus.