Révisions 2025
Séries de nombres
4 juin 2025

941

Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \sin(u_n)$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum u_n^3$ converge (on pourra étudier $u_{n+1} - u_n$).
3. Etudier la nature de la série $\sum u_n^2$ (on pourra étudier $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$)

Correction

1. La fonction sin étant définie sur $\mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne pose aucun problème de définition.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   sin est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $0 = \sin(0) < u_{n+1} < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 < \frac{\pi}{2}$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   On a donc prouvé :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

   $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n < 0$ par stricte convexité de sin sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ou par étude de la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$
   La suite (u_n) est donc décroissante et minorée donc convergente.
   Sa limite est un nombre compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\sin(x) = x$.
   Seul $x = 0$ convient (convexité ou étude de fonction)
2. $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \sim -\frac{u_n^3}{6}$
   La suite (u_n) converge donc la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.
   Tout étant ici négatif, on en déduit que la série de terme général u_n^3 converge.
3. $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) \sim -\frac{u_n^2}{6}$
   La suite $(\ln(u_n))$ diverge (vers $-\infty$) donc la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge.
   Tout étant ici négatif, on en déduit que la série de terme général u_n^2 diverge.

Exercice 2 *(CCP PSI 2024)*

1. Rappeler le critère spécial des séries alternées.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
3. La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?

Correction

1. C'est du cours.
2. - $\forall n \in \mathbb{N}^*\ (-1)^n u_n \geq 0$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |u_n| = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
     On en déduit : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$
     $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq \displaystyle\int_{(n+1)^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
     D'où par produit $|u_{n+1}| \leq |u_n|$.
     Donc la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

   Donc la série de terme général u_n converge.
3. $\forall x \geq 1\ x^2 \geq x$
   Donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \displaystyle\int_{-n^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{n^2}^{+\infty} = \mathrm{e}^{-n^2} \leq \mathrm{e}^{-n}$
   On en déduit :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |u_n| = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^n$ terme général d'une série convergente (série géométrique de raison strictement inférieure à 1)
   Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge absolument.

Exercice 3 *(CCP 2021)*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique. Montrer :
   $\forall p \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (u_{2i-1} + u_{2i}) = \sum_{i=1}^{2p} u_i$
2. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
   Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}} \right)$.
   En déduire que $R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}} \right)$.
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$.
   Montrer que g_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée est croissante.

(b) A l'aide de l'égalité des accroissements finis, en déduire que
$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2k)^{3/2}} \leq |R_n| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2k+1)^{3/2}}$.

(c) Montrer que la série $\sum R_n$ converge.

Correction

1. On raisonne par récurrence sur p.

   Pour $p=1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(u_{2i-1}+u_{2i}) = u_1+u_2$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{2p}u_i = u_1+u_2$: la propriété est vraie au rang 1.

   On suppose la propriété vraie au rang p.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p+1}(u_{2i-1}+u_{2i}) &= \sum_{i=1}^{p}(u_{2i-1}+u_{2i}) + u_{2p+1}+u_{2p+2} = \sum_{i=1}^{2p}u_i + u_{2p+1}+u_{2p+2}\\ &= \sum_{i=1}^{2p+2}u_i\end{aligned}$$

   Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.

2. (a)
   - la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ est alternée
   - $\displaystyle\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$
   - la suite $\displaystyle\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

   Donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.

   (b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+2p}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} &= \sum_{l=1}^{2p}\frac{(-1)^{n+l}}{\sqrt{n+l}} = (-1)^n\sum_{l=1}^{2p}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}\\ &= (-1)^n\sum_{l=1}^{p}\left(\frac{(-1)^{2l-1}}{\sqrt{n+2l-1}}+\frac{(-1)^{2l}}{\sqrt{n+2l}}\right) = (-1)^n\sum_{l=1}^{p}\left(-\frac{1}{\sqrt{n+2l-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2l}}\right)\\ &= (-1)^{n+1}\sum_{l=1}^{p}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2l-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2l}}\right)\\ &= (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2k+2}}\right)\end{aligned}$$

   $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+2p}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} R_n$ donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2k+2}}\right)$ converge et
   $\displaystyle R_n = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}}-\frac{1}{\sqrt{n+2+2k}}\right)$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $x \mapsto n + x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, g_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; g_n(x) = (n + x)^{-1/2}$
Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; g_n'(x) = -\dfrac{1}{2}(n + x)^{-3/2}$
et
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; g_n''(x) = \dfrac{3}{4}(n + x)^{-5/2} \geq 0$
On en déduit que g_n' est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On applique les accroissements finis à g_n entre $2k + 1$ et $2k + 2$:
$\exists x_k \in]2k + 1; 2k + 2[$ tq $g_n(2k + 2) - g_n(2k + 1) = (2k + 2 - (2k + 1))g_n'(x_k) = g_n'(x_k)$
Mais g_n' est croissante donc : $g_n'(2k + 1) \leq g_n(2k + 1) - g_n(2k + 2) \leq g_n'(2k + 2)$.
Par ailleurs, g_n' est négative donc g_n est décroissante et $g_n(2k + 1) - g_n(2k + 2) \geq 0$
Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n + 1 + 2k}} - \frac{1}{\sqrt{n + 2 + 2k}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (g_n(2k + 1) - g_n(2k + 2)) \geq 0.$
On en déduit :
$\displaystyle |R_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} (g_n(2k + 1) - g_n(2k + 2)) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g_n'(x_k).$
On en déduit :
$\displaystyle -\sum_{k=0}^{+\infty} g_n'(2k + 2) \leq |R_n| \leq -\sum_{k=0}^{+\infty} g_n'(2k + 1)$
Donc :
$\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + 2k + 2)^{3/2}} \leq |R_n| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + 2k + 1)^{3/2}}$
et finalement :
$\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n + 2k)^{3/2}} \leq |R_n| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + 2k + 1)^{3/2}}$

(c) $\displaystyle |R_{n+1}| \leq \frac{1}{2}1\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + 1 + 2k + 1)^{3/2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n + 2k)^{3/2}} \leq |R_n|$
Donc la suite $(|R_n|)$ est décroissante.
Comme toute suite des restes d'une série convergente, elle converge vers 0.
Enfin la formule de la question 2b montre que R_n a le signe de $(-1)^{n+1}$ donc que la série $\sum R_n$ est alternée.
D'après le TSCSA, la série $\sum R_n$ converge.

Exercice 4 *(CCP 2019)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.
On pose $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{(S_n)^a}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donner la nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$.

2. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

(a) Que peut-on dire de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) Donner un équivalent de v_n et de w_n. En déduire la nature des séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

3. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(a) Montrer que $v_n \sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$. En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

(b) En déduire la nature de $\sum w_n$ quand $a \leq 1$.

(c) Si $a > 1$, montrer :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \; w_n \leq \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$

(d) En déduire la nature de $\sum w_n$ quand $a > 1$.

Correction

1. La série de terme général u_n diverge grossièrement.
$\forall n \in \mathbb{N} \; S_n = n+1$
$\forall n \in \mathbb{N} \; v_n = \dfrac{1}{n+1}$
On en déduit que la série de terme général v_n diverge.
$\forall n \in \mathbb{N} \; w_n = \dfrac{1}{(n+1)^a}$
Donc :
$\sum w_n$ converge $\iff a > 1$

2. (a) La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
On en déduit $S_n \sim s$.

(b) $v_n \sim \dfrac{u_n}{s}$ et tout est positif.
La série de terme général u_n convergeant, la série de terme général v_n converge.
$w_n \sim \dfrac{u_n}{s^a}$ et tout est positif.
La série de terme général u_n convergeant, la série de terme général w_n converge.

3. (a) La série de terme général u_n diverge et c'est une série à termes positifs donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
u_n étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la suite (S_n) est croissante. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
$v_n = \dfrac{u_n}{S_n} = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$
$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{S_{n-1}}{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
On en déduit $v_n \sim -\ln\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$
La suite (S_n) croît et diverge vers $+\infty$ donc il en est de même pour la suite $(\ln(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Par le lien suite-série, on en déduit que la série de terme général $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ diverge.
Comme on a un équivalent entre suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on peut en déduire que la série de terme général v_n diverge.

(b) $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \; S_n \geq 1$
$a \leq 1$ et $\ln(S_n) \geq 0$ donc $a\ln(S_n) \leq \ln(S_n)$
En prenant l'exponentielle, on en déduit $S_n^a \leq S_n$ pour $n \geq n_0$.

D'où :
$\forall n \geq n_0 \; 0 \leq v_n \leq w_n$
Comme la série $\sum v_n$ diverge, la série $\sum w_n$ diverge.

(c) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^a}$ est décroissante ($a \geq 0$ suffit) donc :
$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} \geq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{S_n^a} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^a} = w_n$$

(d) $\forall N \in \mathbb{N}^* \; \displaystyle\sum_{n=0}^{N} w_n \leq w_0 + \sum_{n=1}^{N} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = w_0 + \int_{S_0}^{S_N} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} \leq w_0 + \int_{u_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} \in \mathbb{R}$
La suite des sommes partielles de la série $\sum w_n$ est donc majorée.
Comme c'est une série à termes positifs, on en déduit que la série $\sum w_n$ converge.

Exercice 5 *(CCP 2023)*

Dans tout l'exercice, a est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^a)^n}$ existe.
   Dans la suite, on note $U_n(a)$ sa valeur.
2. (a) Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \; U_n(a) = na \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^a)^{n+1}} \, \mathrm{d}t$
   L'énoncé suggérait une intégration par parties.
   (b) En déduire :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \; U_{n+1}(a) = \left(1 - \dfrac{1}{na}\right) U_n(a)$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n(a) = \ln\left(U_n(a)\right) + \dfrac{\ln(n)}{a}$.
   Montrer que $W_{n+1}(a) - W_n(a) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
4. Montrer que la suite $\left(n^{1/a} U_n(a)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^*$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = U_n(2)$.
   Montrer que $v_n = \dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2} \lambda$ avec λ à déterminer.
6. On pose $I = U_1(3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.
   Montrer en posant $t = \dfrac{1}{x}$ que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} \, \mathrm{d}x$.
   Calculer $2I$ et en déduire I.
   L'énoncé donnait $1 + x^3 = (1+x)(x^2 - x + 1)$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^a)^n} \end{cases}$.
   f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   $f_n(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^{an}}$ avec $an > 1$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a) On prend $u(t) = \dfrac{1}{(1+t^a)^n}$, $u'(t) = \dfrac{-nat^{a-1}}{(1+t^a)^{n+1}}$
$v'(t) = 1$ et $v(t) = t$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) = \dfrac{t}{(1+t^a)^n} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$: l'intégration par parties est justifiée.
Comme de plus $v(0) = 0$, on peut écrire directement :
$U_n(a) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t \times \frac{-nat^{a-1}}{(1+t^a)^{n+1}} = na\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^a)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ U_n(a) = na\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^a)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = na\int_0^{+\infty} \frac{t^a+1-1}{(1+t^a)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = na\left(U_n(a) - U_{n+1}(a)\right)$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ naU_{n+1}(a) = (na-1)U_n(a)$
et on conclut facilement.

3.

$$\begin{aligned}
W_{n+1}(a) - W_n(a) &= \ln\left(U_{n+1}(a)\right) + \frac{\ln(n+1)}{a} - \ln\left(U_n(a)\right) - \frac{\ln(n)}{a}\\
&= \ln\left(\frac{U_{n+1}(a)}{U_n(a)}\right) + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{an}\right) + \frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= -\frac{1}{an} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

4. D'après la question précédente, la série de terme général $W_{n+1}(a) - W_n(a)$ converge absolument donc converge.
On en déduit que la suite $(W_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.
Par continuité de la fonction exponentielle, $n^{1/a}U_n(a) = \mathrm{e}^{W_n(a)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^l \in \mathbb{R}_+^*$.

5. $v_1 = U_1(2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$
Pour $n = 1$, $\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2} = \dfrac{1}{2}$
On pose donc $\lambda = \pi$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: $v_n = \dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}\pi$
$\mathcal{P}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= U_{n+1}(2) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)U_n(2)\\
&= \frac{2n-1}{2n}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}\pi\\
&= \frac{(2n-1)!}{2^{2n}n!(n-1)!}\pi = \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)!}{2^{2n}n!(n-1)!}\pi\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n+1}\left(n!\right)^2}\pi
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

6. Le changement de variable proposé est bien $\mathcal{C}^1$ strictement monotone.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+1/(x^3)} \frac{-\,\mathrm{d}x}{x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \\
2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}$$

Finalement, $I = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Exercice 6 *(Mines 2023)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et décroissante.
On suppose $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $l>1$ alors la série $\sum u_n$ converge et que si $l<1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a<b$.
   On pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a+kc}{b+kc}$.
   Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$.

Correction

1. On pense aux séries de Riemann, a-t-on un équivalent de la forme $u_n = \dfrac{C}{n^l}$?
   On peut arriver à cette question différemment.
   $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = l + o(1)$
   Donc $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \dfrac{l}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   Donc $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{l}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   Donc $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) \sim \dfrac{l}{n}$ (si ł $\neq 0$).
   En sommant ces équivalents (c'est hors-programme mais peut être justifié avec les outils du programme), on obtient :
   $\ln(u_n) \sim -l \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim -l\ln(n) = \ln\left(\frac{1}{n^l}\right)$
   Mais on peut pas prendre l'exponentielle d'un équivalent.

Il s'agit donc de prouver que la suite $(n^l u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.
Cela revient à montrer que la suite $\Big(\ln(n^l u_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Cela revient à montrer que la série de terme général $\ln\left((n+1)^l u_{n+1}\right) - \ln(n^l u_n)$ converge.
Mais :

$$\begin{array}{rcl}\ln\left((n+1)^l u_{n+1}\right) - \ln(n^l u_n) & = & l\ln(n+1) + \ln(u_{n+1}) - l\ln(n) - \ln(u_n) \\ & = & l\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) \\ & = & \dfrac{l}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\dfrac{l}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \\ & = & o\left(\dfrac{1}{n}\right)\end{array}$$

ce qui ne permet pas de conclure.

On suppose $l > 1$.
Soit $a \in]1; l[$.

$$\begin{array}{rcl}\ln\left((n+1)^a u_{n+1}\right) - \ln(n^a u_n) & = & a\ln(n+1) + \ln(u_{n+1}) - a\ln(n) - \ln(u_n) \\ & = & a\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) \\ & = & \dfrac{a}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\dfrac{l}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \\ & = & \dfrac{a-l}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\end{array}$$

Donc $\ln\left((n+1)^a u_{n+1}\right) - \ln(n^a u_n) \sim \dfrac{a-l}{n} < 0$ terme général d'une série divergente.
Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln\left((n+1)^a u_{n+1}\right) - \ln(n^a u_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
On en déduit $\ln(n^a u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
Donc $n^a u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ie $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^a}\right)$ avec $a > 1$.
On en déduit que la série de terme général u_n converge.

On suppose $l < 1$.
Soit $a \in]l; 1[$.

$$\begin{array}{rcl}\ln\left((n+1)^a u_{n+1}\right) - \ln(n^a u_n) & = & a\ln(n+1) + \ln(u_{n+1}) - a\ln(n) - \ln(u_n) \\ & = & a\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) \\ & = & \dfrac{a}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\dfrac{l}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \\ & = & \dfrac{a-l}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\end{array}$$

Donc $\ln\left((n+1)^a u_{n+1}\right) - \ln(n^a u_n) \sim \dfrac{a-l}{n} > 0$ terme général d'une série divergente.
Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln\left((n+1)^a u_{n+1}\right) - \ln(n^a u_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

On en déduit $\ln(n^a u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Donc $n^a u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ie $\dfrac{1}{n^a} = o(u_n)$ avec $a < 1$.
Supposons que la série de terme général u_n converge.
Alors par comparaison des termes généraux de séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{1}{n^a}$ converge.
C'est absurde donc la série de terme général u_n diverge.

2. La suite ne pose pas de problème de définition et est à valeurs strictement positives.
Comme on suppose $a < b$, chaque facteur est strictement inférieur à 1 et la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) &= n\left(\frac{b+(n+1)c}{a+(n+1)c} - 1\right)\\ &= n\frac{b-a}{a+(n+1)c}\end{aligned}$$

Donc $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{b-a}{c}$.
Si $b - a > c$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
Si $b - a < c$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.
Si $b - a = c$ alors $b = a + c$ et :
$u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a+kc}{b+kc} = \prod_{k=0}^{n} \frac{a+kc}{a+(k+1)c} = \frac{a}{a+(n+1)c} \sim \frac{a}{nc}$ (et tout est positif)
donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 7 *(Mines 2023)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n^\alpha}$.
Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Correction
La façon naturelle de commencer cet exercice consiste à étudier la suite.
La suite ne pose pas de problème de définition et :
$\forall n \geq 2\ u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}}}{(n-1)^\alpha} \geq 0$.
Donc :
$\forall n \geq 3\ u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}}}{(n-1)^\alpha} \leq \dfrac{1}{(n-1)^\alpha}$.
On en déduit que si $\alpha > 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.
Si $\alpha > 0$, l'encadrement précédent nous permet d'affirmer que (u_n) converge vers 0. On en déduit alors $u_n \sim \dfrac{1}{(n-1)^\alpha} \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, tout étant positif. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Pour $\alpha < 0$, le comportement de u_n n'est pas clair : le terme en $\dfrac{1}{n^\alpha}$ fait tendre u_n vers $+\infty$ mais l'exponentielle la ramène en 0.
J'ai alors commencer à étudier le cas $\alpha = 0$ et j'ai constaté que si il y avait une limite, elle vérifiait $l = \mathrm{e}^{-l}$. Je me suis intéressé à cette équation qui a une et une seule solution, strictement positive donc (u_n) ne peut pas converger vers 0 et la série diverge.
A ce moment là, j'ai eu la bonne idée :
Si la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On a alors $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, tout étant positif. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge et $\alpha > 1$.
Compte tenu du début, on peut affirmer :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Exercice 8 *(Centrale 2023)*

1. On définit $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$.
   Donner selon α, la nature de la série $\sum I_n(\alpha)$.
   On pensera au changement de variable $x = \tan(t)$.
2. Etudier selon α, la nature de $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$.

Correction

1. $I_n(\alpha)$ ne pose pas de problème de définition lorsque $n \in \mathbb{N}^*$: c'est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.
   On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $x = \tan(t)$.
   $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - \dfrac{1}{1 + \tan^2(t)} = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.
   $\mathrm{d}x = (1 + \tan^2(t))\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$.

$$\begin{aligned} I_n(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (n\pi)^\alpha \dfrac{x^2}{1+x^2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2 + (n\pi)^\alpha x^2} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha}} \arctan\left(\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha} x \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha}} \end{aligned}$$

   Si $\alpha < 0$, $I_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2} \neq 0$: la série $\sum I_n(\alpha)$ diverge grossièrement.
   Si $\alpha = 0$, $I_n(\alpha) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc la série $\sum I_n(\alpha)$ diverge grossièrement.
   Si $\alpha > 0$, $I_n(\alpha) \sim \dfrac{\pi}{2\pi^{\alpha/2}} \dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$
   Tout étant positif, la série $\sum I_n(\alpha)$ converge si, et seulement si $\alpha > 2$.
2. Cette fois il y a un problème de définition en 0.
   $t^\alpha \sin^2(t) \sim_0 t^{\alpha+2}$

Si $\alpha > -2$ alors $\dfrac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)} \xrightarrow[\substack{t\to 0\\ t>0}]{} 1$

Si $\alpha = -2$ alors $\dfrac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)} \xrightarrow[\substack{t\to 0\\ t>0}]{} \dfrac{1}{2}$

Si $\alpha < -2$ alors $\dfrac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)} \xrightarrow[\substack{t\to 0\\ t>0}]{} 0$

Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)}$ est prolongeable par continuité en 0.

Lien entre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **et** $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Soit $F \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui diverge vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

- On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
  Cela signifie que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{K}$.
  D'après la relation de Chasles :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{K}$.
  Donc la série de terme général u_n converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$
  Par contrapposition, on en déduit que si $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
- On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
  $\forall n \in \mathbb{N}\ F(x_n) = S_{n-1}$
  Donc $F(x_n) = \displaystyle\int_0^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{K}$.
  Que peut-on en déduire pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$?
  Dans le cas général, pas grand chose.
  Par contre, si f est positive alors F est croissante et $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
  Mais alors $F(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$.
  Par unicité de la limite, $\lambda = l \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Il en résulte que :
$J(\alpha)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 2$.
On observera que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2(t)}$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

On va justifier en détail l'équivalence.

On suppose $\alpha > 2$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^{\alpha}\sin^2(t)} &\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^{\alpha}\sin^2(t)} \text{ car } \alpha \geq 0 \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (n\pi)^{\alpha}\sin^2(x)} \\
&\quad \text{changement de variable } t = x + n\pi \\
&\leq \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (n\pi)^{\alpha}\sin^2(x)} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (n\pi)^{\alpha}\sin^2(x)} \\
&\leq 2I_n \text{ changement de variable } x = \pi - t
\end{aligned}$$

$\alpha > 2$ donc la série de terme général I_n converge.
On en déduit que la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^{\alpha}\sin^2(t)}$ converge.
D'après les remarques précédentes, $J(\alpha)$ converge.

On suppose $\alpha \leq 0$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^{\alpha}\sin^2(t)} &\geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^{\alpha}\sin^2(t)} \text{ car } \alpha \leq 0 \\
&\geq \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (n\pi)^{\alpha}\sin^2(x)} = 2I_n \geq 0
\end{aligned}$$

$\alpha \leq 2$ donc la série de terme général I_n diverge.
On en déduit que la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^{\alpha}\sin^2(t)}$ diverge.
D'après les remarques précédentes, $J(\alpha)$ diverge.

On suppose $\alpha \in]0; 2]$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^{\alpha}\sin^2(t)} &\geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + ((n+1)\pi)^{\alpha}\sin^2(t)} \text{ car } \alpha \geq 0 \\
&\geq \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + ((n+1)\pi)^{\alpha}\sin^2(x)} = 2I_{n+1} \geq 0
\end{aligned}$$

$\alpha \leq 2$ donc la série de terme général I_n diverge.
On en déduit que la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^{\alpha}\sin^2(t)}$ diverge.
D'après les remarques précédentes, $J(\alpha)$ diverge.

Exercice 9 *(Centrale 2023)*

On dit qu'une série de terme général u_n est d'ordre 1 si, et seulement si, elle converge et la série de terme général $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ converge.

On dit qu'elle est d'ordre 2 si en plus la série de terme général $R'_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k$ converge.

On définit de la même manière les ordres suivants.

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ est d'ordre 1.

2. Soit $q \in]-1;1[$.
   Montrer que la série de terme général q^n est de tout ordre.
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives telles que $u_n = O(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
   Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
   Montrer alors par récurrence sur l'ordre que si $\sum v_n$ a un ordre donné alors il en est de même pour $\sum u_n$.
4. Ecrire une fonction `reste(liste)` qui prend en entrée une liste de nombres et qui renvoie une liste L telle que $L[i] = \displaystyle\sum_{k=i}^{len(liste)} liste[i]$.
   Vérifier que `reste([1,2,3,4])` renvoie `[10,9,7,4]`.
5. Je n'ai pas l'énoncé précis de cette question. Je ne propose donc qu'une tentative de restitution.
   L'examinateur a déclaré au candidat : avec la question 4 j'ai pu évaluer Python, ce n'est pas très important pour la question 5.

```
import matplotlib.pyplot as plt
def sommes_partielles(L):
    s=0
    S=[]
    for i in range(len(L)):
        s+=L[i]
        S.append(s)
    return(S)
N=10000
les_x=[i+1 for i in  range (N)]
les_y=sommes_partielles(U)
plt.plot(les_x,les_y)
```

   affiche $u_1, u_1+u_2, \dots, u_1+\dots+u_N$ en fonction de $1,\dots,N$ et permet de conjecturer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$
   Conjecturer l'ordre de la série de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \{2,3;3;3,2\}$.
   On donne également `from scipy.special import zeta`
6. Soit $\alpha > 1$.
   Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$
7. Démontrer la conjecture de la question 5.
8. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
   Montrer que $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
   Il y avait trois questions de plus.

Correction

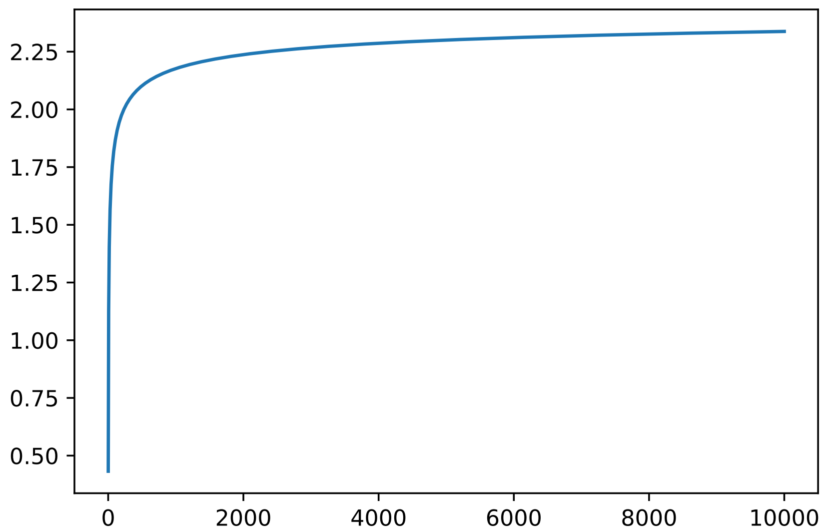
1. la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc par le lien suite série la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}$
   On en déduit que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ est d'ordre 1.
   On peut montrer qu'elle n'est pas d'ordre 2, cf la comparaison d'une série à une intégrale dans les questions suivantes.
2. La série de terme général q^n converge et :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q}q^n$
   Donc les séries de terme général $u_n = q^n$ et R_n ont le même ordre.
   Mais dans le cas général, si la série de terme général R_n est d'ordre r alors la série de terme général u_n est d'ordre $r+1$.
   On peut alors montrer par récurrence que la série de terme général q^n est d'ordre r pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$.
   Des calculs précédents, il résulte que les séries de termes généraux u_n et R_n converge donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(r)$ vraie.
   La série de terme général q^n est d'ordre r.
   On en déduit que la série de terme général R_n est d'ordre r.
   On en déduit que la série de terme général q^n est d'ordre $r+1$.
3. $u_n = O(v_n)$ donc :
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \geq n_0\ u_n \leq M v_n$
   $\forall n \geq n_0\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + M\sum_{k=n_0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + M\sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$ réel indépendant de n
   Donc la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est majorée. Comme c'est une série à termes positifs, on en déduit qu'elle converge.
   $\forall n \geq n_0\ |R_n(u)| = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = M\,|R_n(v)|$
   Donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
   Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(r)$: si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ est d'ordre r alors $\sum u_n$ est d'ordre r
   Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ est d'ordre 1.
   D'après le début de la question $\sum u_n$ converge et $R_n(u) = O\left(R_n(v)\right)$.
   $\sum v_n$ est d'ordre 1 donc la série de terme général $R_n(v)$ converge. Mais $\sum R_n(u)$ et $\sum R_n(v)$ sont des séries à termes positifs donc $\sum R_n(u)$ converge et $\sum u_n$ est d'ordre 1.
   Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(r)$ vraie.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ est d'ordre $r+1$.
$\sum R_n(u)$ et $\sum R_n(v)$ sont des séries à termes positifs telles que $R_n(u) = O\left(R_n(v)\right)$ et $\sum R_n(v)$ est d'ordre r.
D'après l'hypothèse de récurrence, $\sum R_n(u)$ est d'ordre r.
On en déduit que $\sum u_n$ est d'ordre $r+1$.
$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

4.
```
def reste(L):
    res=[0]*len(L)
    s=0
    for i in range(len(L)-1,-1,-1):
        s+=L[i]
        res[i]=s
    return (res)
```

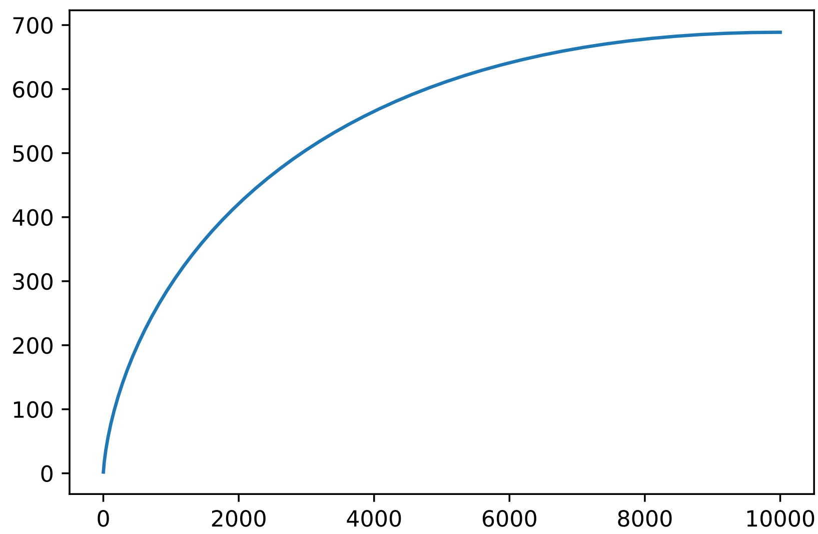
5. • **Premier cas :** $\alpha = 2,3$

```
N=10000
alpha=2.3
S=zeta(alpha)
R=[S]*N
s=0
for i in range(1,N+1):
    s+=1/i**alpha
    R[i-1]-=s

les_x=[i+1 for i in  range (N)]
les_y=sommes_partielles(R)
plt.plot(les_x,les_y)
```
donne la figure suivante :



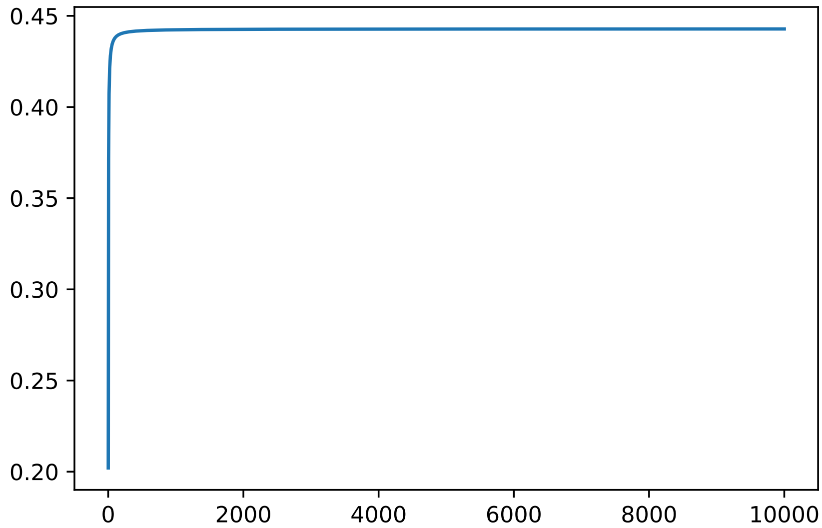
et on conjecture que l'ordre est au moins 1.

On poursuit avec :
```
S=les_y[N-1]
R2=[S]*N
s=0
for i in range(1,N+1):
    s+=R[i-1]
    R2[i-1]-=s

les_y=sommes_partielles(R2)
plt.plot(les_x,les_y)
```
On obtient :



et on conjecture que l'ordre est exactement 1.

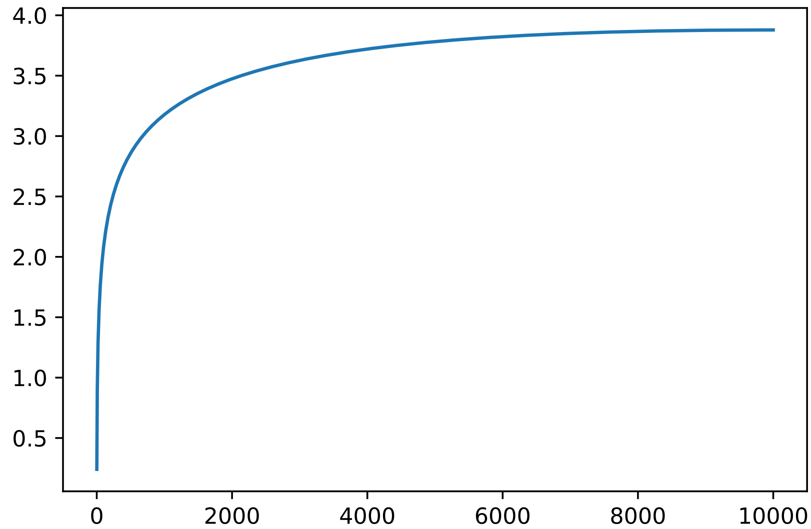
- **Deuxième cas :** $\alpha = 3$
```
N=10000
alpha=3
S=zeta(alpha)
R=[S]*N
s=0
for i in range(1,N+1):
    s+=1/i**alpha
    R[i-1]-=s

les_x=[i+1 for i in  range (N)]
les_y=sommes_partielles(R)
plt.plot(les_x,les_y)
```
donne la figure suivante :



et on conjecture que l'ordre est au moins 1.
On poursuit avec :

```
S=les_y[N-1]
R2=[S]*N
s=0
for i in range(1,N+1):
    s+=R[i-1]
    R2[i-1]-=s

les_y=sommes_partielles(R2)
plt.plot(les_x,les_y)
```

On obtient :

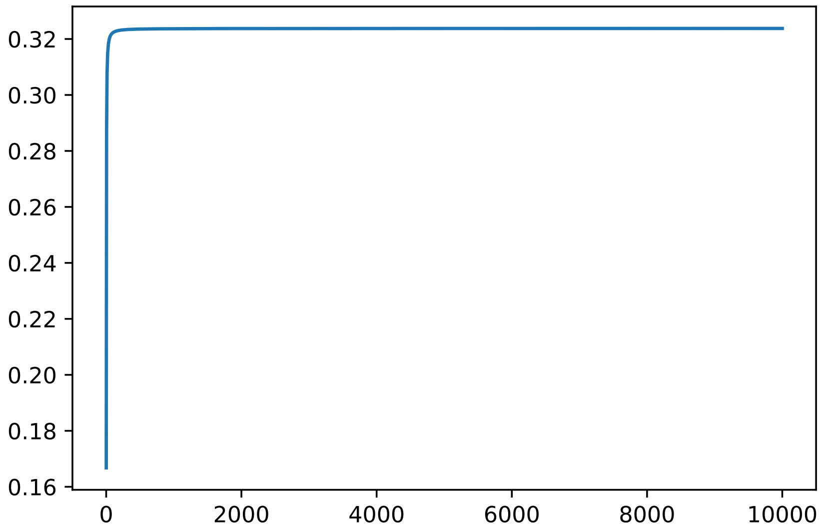


et on conjecture que l'ordre est exactement 1.

- **Troisième cas :** $\alpha = 3,2$

```
N=10000
alpha=3.2
S=zeta(alpha)
R=[S]*N
s=0
for i in range(1,N+1):
    s+=1/i**alpha
    R[i-1]-=s

les_x=[i+1 for i in  range (N)]
les_y=sommes_partielles(R)
plt.plot(les_x,les_y)
```

donne la figure suivante :

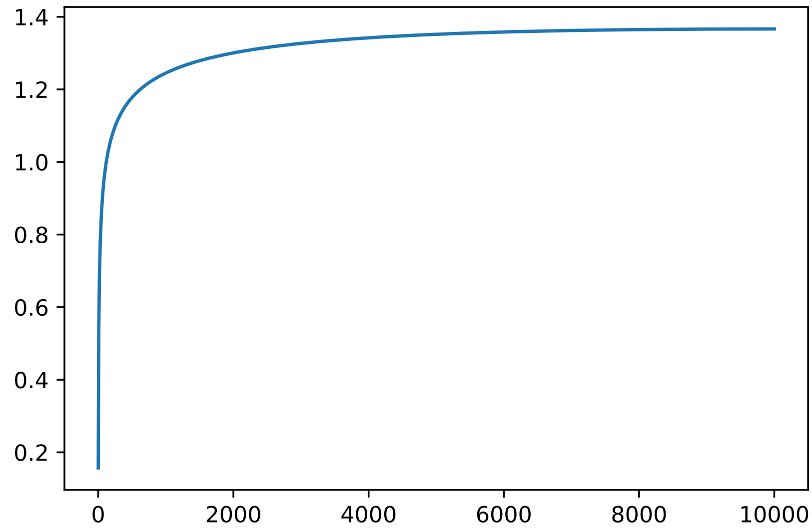


et on conjecture que l'ordre est au moins 1.

On poursuit avec :

```
S=les_y[N-1]
R2=[S]*N
s=0
for i in range(1,N+1):
    s+=R[i-1]
    R2[i-1]-=s

les_y=sommes_partielles(R2)
plt.plot(les_x,les_y)
```

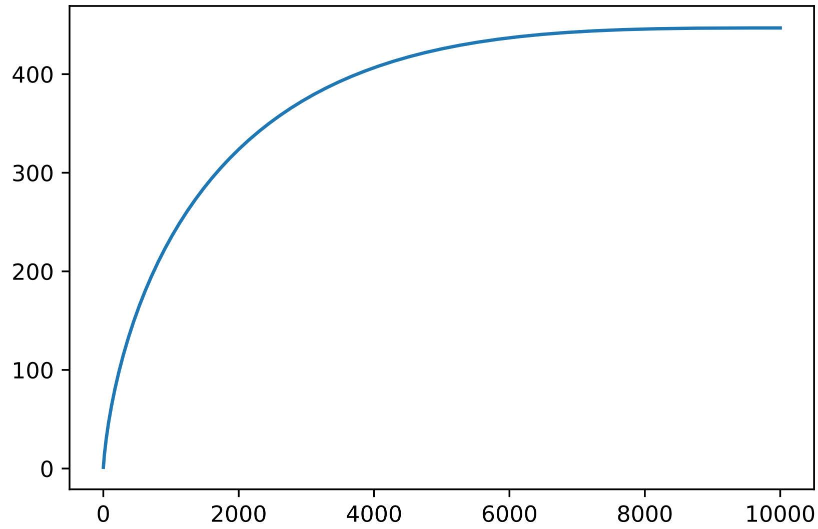
On obtient :



et on conjecture que l'ordre au moins 2.
On poursuit avec

```
S=les_y[N-1]
R3=[S]*N
s=0
for i in range(1,N+1):
    s+=R2[i-1]
    R3[i-1]-=s

les_y=sommes_partielles(R3)
plt.plot(les_x,les_y)
```

On obtient :



et on conjecture que l'ordre est exactement 2.

6. Il s'agit d'une comparaison série-intégrale classique.
$\alpha > 1$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
On en déduit :
$\forall k \geq 2 \ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$
D'où en sommant :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$
puis :
$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$
   - **Premier cas :** $\alpha = 2,3$
   La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge et $R_n \sim \dfrac{1}{1,3n^{1,3}}$.
   $1,3 > 1$ donc la série de terme général R_n converge (tout est positif donc on peut utiliser les équivalents).
   $\dfrac{1}{n^{1,3}} = O(R_n)$ donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1,3}} = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k\right)$
   On en déduit $\dfrac{1}{n^{0,3}} = O\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k\right)$
   Donc la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k$ diverge (contrapposée de la question 3).
   Donc la série de terme général $\dfrac{1}{n^{2,3}}$ est d'ordre exactement 1.
   - **Deuxième cas :** $\alpha = 3$
   La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge et $R_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$.
   $2 > 1$ donc la série de terme général R_n converge (tout est positif donc on peut utiliser les équivalents).
   $\dfrac{1}{n^2} = O(R_n)$ donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k\right)$
   On en déduit $\dfrac{1}{n} = O\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k\right)$
   Donc la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k$ diverge (contrapposée de la question 3).
   Donc la série de terme général $\dfrac{1}{n^3}$ est d'ordre exactement 1.
   - **Troisième cas :** $\alpha = 3,2$
   La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge et $R_n \sim \dfrac{1}{2,2n^{2,2}}$.
   $2,2 > 1$ donc la série de terme général R_n converge (tout est positif donc on peut utiliser les équivalents).

$R_n = O\left(\dfrac{1}{n^{2,2}}\right)$ donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2,2}}\right)$

On en déduit $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k = O\left(\frac{1}{k^{1,2}}\right)$

Donc la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k$ converge.

Cela signifie que la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3,2}}$ est d'ordre au moins 2.

$\dfrac{1}{n^{2,2}} = O(R_n)$ donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2,2}} = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k\right)$

On en déduit $\dfrac{1}{n^{1,2}} = O\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k\right)$ puis :

$\dfrac{1}{n^{0,2}} = O\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty} R_l\right)\right)$

Donc la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty} R_l\right)$ diverge et la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3,2}}$ est d'ordre exactement 2.

7. Classiquement, la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge et sa somme :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ (cf le cours sur les séries entières)

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k \,\mathrm{d}t \text{ par simple linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} \,\mathrm{d}t \quad (-t \neq 1) \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1} \,\mathrm{d}t$