Révisions 2025
Préparation X ESPCI
4 juin 2025

941

Exercice 1 *(X 2024)*

Calculer $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} \frac{1}{2-z}$

Exercice 2 *(X 2024)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A et B ont au moins une valeur propre commune.

(ii) Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $PA = BP$

Exercice 3 *(X 2024)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = -I_n$.
Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 4 *(X 2024)*

Soient A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices dont les valeurs propres sont strictement supérieures à 1.
Montrer que les valeurs propres de AB sont strictement supérieures à 1.

Exercice 5 *(X 2024)*

Soit $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(2\pi)$.
De plus, on suppose qu'il existe un entier n tel que pour tout k compris entre 0 et n, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0$.
Quel est le nombre minimum de points d'annulation de f ?

Exercice 6 *(X 2024)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
On pose $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 7 *(X 2024)*

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' - 4xy = 0$.
Indication : chercher les solutions développables en série entière

Exercice 8 *(X 2024)*

Soient $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E) : y'' - py = 0$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = 0$.
2. On admet que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe y vérifiant (E) et $(y(0), y'(0)) = (a, b)$. Montrer que (E) admet une solution non bornée.

Exercice 9 *(X 2024)*

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :
$\forall t \in \mathbb{R}\ X'(t) = JSX(t)$ où $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 *(X 2024)*

On étudie un groupe de cellules. A l'instant initial $n = 0$, il y en a une. A chaque instant, chaque cellule peut de façon équiprobable : mourir, rester telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3.
Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.