Révisions 2025
Préparation X ESPCI
4 juin 2025

941

Exercice 1 *(X 2024)*

Calculer $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n}\frac{1}{2-z}$

Correction
Soit $y=\dfrac{1}{2-z}$ avec $z\in\mathbb{U}_n$.
$2-z=\dfrac{1}{y}$ puis $z=2-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2y-1}{y}$.
On a donc $(2y-1)^n=y^n$ et y est racine du polynôme $P(X)=(2X-1)^n-X^n$.
Ce polynôme est de degré n donc il a n racines comptées avec leurs multiplicités.
Mais les $\dfrac{1}{2-z}$ avec $z\in\mathbb{U}_n$ sont deux à deux distincts donc ce sont les racines de P.
La somme cherchée est donc la somme des racines de P soit : $\dfrac{n2^{n-1}}{2^n-1}$

Autre méthode

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in\mathbb{U}_n}\frac{1}{2-z} &= \frac{1}{2}\sum_{z\in\mathbb{U}_n}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{z\in\mathbb{U}_n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{2^k}\right) \text{ car } \left|\frac{z}{2}\right|<1\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{z\in\mathbb{U}_n}z^k\right) \text{ par simple linéarité de la somme des séries}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{z\in\mathbb{U}_n}z^{r(k)}\right) \text{ où } r(k) \text{ est le reste de la division euclidienne de } k \text{ par } n\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{n}{2^{nl}}=\frac{n}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}\\
&= \frac{n2^{n-1}}{2^n-1}
\end{aligned}$$

Exercice 2 *(X 2024)*

Soient A et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A et B ont au moins une valeur propre commune.

(ii) Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $PA = BP$

Correction

- **Première méthode**

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit λ une valeur propre commune à A et B.
$\chi_A = \chi_{A^T}$ (facile à redémontrer) donc λ est valeur propre de B^T.
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.
Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A^T associé à la valeur propre λ.
X est non nul donc il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$.
Y est non nul donc il existe $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $y_{j_0} \neq 0$.
Soit $P = XY^T$.
$p_{i_0,j_0} = x_{i_0}y_{j_0} \neq 0$ donc P est non nulle (en fait P est de rang 1).
$PA = XY^TA = X\left(A^TY\right)^T = X(\lambda Y)^T = \lambda XY^T = \lambda P$
$BP = BXY^T = \lambda XY^T = \lambda P$
Donc $PA = BP$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On suppose qu'il existe P non nulle telle que $PA = BP$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k) : PA^k = B^kP$
$\mathcal{P}(0)$ est triviale : $A^0 = B^0 = I_n$ et $\mathcal{P}(1)$ est vraie par hypothèse.
On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$\begin{aligned} PA^{k+1} &= (PA)A^k = (BP)A^k = B(PA^k) \\ &= B\,B^kP = B^{k+1}P \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Donc :
$\forall k \in \mathbb{N}\ PA^k = B^kP$
On en déduit :
$\forall Q \in \mathbb{C}[X]\ PQ(A) = Q(B)P$
En particulier $P\chi_B(A) = \chi_B(B)P = 0$ avec le théorème de Cayley-Hamilton.
P est non nulle donc $\chi_B(A) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} (A - \lambda I_n)^{mul(\lambda)}$ n'est pas inversible.
L'un des facteurs de ce produit n'est pas inversible ie il existe λ valeur propre de B telle que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible.
Ce λ est une valeur propre commune à A et à B.

- **Deuxième méthode**

Soit $f \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ P \mapsto PA \end{cases}$.
Soit $g \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ P \mapsto BP \end{cases}$.
f et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$\forall P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ (f \circ g)(P) = f(BP) = BPA$
$\forall P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ (g \circ f)(P) = g(PA) = BPA$
Donc f et g commutent.
On a vu en cours qu'alors f et g sont simultanément trigonalisables (on est dans $\mathbb{C}$).
Les valeurs propres de $f - g$ sont donc de la forme $\lambda - \mu$ avec λ valeur propre de f et μ valeur propre de g.
Mais si λ est valeur propre de f :

$\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tq $AP = \lambda P$
P étant non nulle, une de ses colonnes est non nulle, mettons $C_i(P)$.
$AP = \lambda P$ donc $AC_i(P) = \lambda C_i(P)$ avec $C_i(P)$ non nulle donc λ est valeur propre de A.
Réciproquement, on suppose λ valeur propre de A.
Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$.
Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que toutes les colonnes de P soient égales à X.
P est non nulle et $AP = \lambda P$ donc λ est valeur propre de f.
Les valeurs propres de f sont donc les valeurs propres de A.
De même, les valeurs propres de g sont les valeurs propres de B.
Les valeurs propres de $f - g$ sont donc de la forme $\lambda - \mu$ avec λ valeur propre de A et μ valeur propre de B.
On en déduit :
$(i) \iff 0 \in \mathrm{Sp}(f - g)$
et :
$(ii) \iff \mathrm{Ker}\,(f - g) \neq \{0\}$
L'équivalence des deux assertions de l'énoncé est alors immédiate.

Exercice 3 *(X 2024)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = -I_n$.
Montrer que A et B sont semblables.

Correction
Le polynôme $X^2 + 1$ annule A.
$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblable à $\begin{pmatrix} iI_\alpha & 0 \\ 0 & -iI_\beta \end{pmatrix}$
Mais A est réelle donc i et $-i$ ont la même multiplicité donc $\alpha = \beta$
$\alpha + \beta = n$ donc n doit être pair (ce qu'on peut aussi voir en prenant le déterminant dès le départ).
Donc A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} iI_p & 0 \\ 0 & -iI_p \end{pmatrix}$ avec $p = \dfrac{n}{2}$.
De même pour B donc A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On a vu en cours qu'elles étaient alors semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 *(X 2024)*

Soient A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices dont les valeurs propres sont strictement supérieures à 1.
Montrer que les valeurs propres de AB sont strictement supérieures à 1.

Correction
A est symétrique définie positive donc classiquement, il existe R symétrique définie positive telle que $A = R^2$.
$AB = R(RBR)R^{-1}$ donc AB est semblable à RBR qui est symétrique réelle.
On en déduit que les valeurs propres de AB sont toutes réelles.
$\forall X \in \mathbb{R}^n\ X^T(RBR)X = (RX)^T B(RX)$.
Si on note μ la plus petite valeur propre de B alors classiquement :
$\forall X \in \mathbb{R}^n\ X^T(RBR)X \geq \mu \|RX\|^2 = \mu X^T R^2 X = \mu X^T AX$
Si on note λ la plus petite valeur propre de A alors classiquement :

$\forall X \in \mathbb{R}^n \ X^T(RBR)X \geq \lambda\mu \|X\|^2$
Si on prend ν la plus petite valeur propre de RBR et X un vecteur propre associé, cette inégalité devient :
$\nu \|X\|^2 \geq \lambda\mu \|X\|^2$
Donc $\nu \geq \lambda\mu > 1$.

Exercice 5 *(X 2024)*

Soit $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(2\pi)$.
De plus, on suppose qu'il existe un entier n tel que pour tout k compris entre 0 et n,
$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0$.
Quel est le nombre minimum de points d'annulation de f ?

Correction
On va montrer par récurrence sur n que f s'annule au moins $2n+2$ fois.
Les fonctions s'annulant une infinité de fois présentent ici peu d'intérêt donc on va se restreindre à $F = \{f \in \mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R}) \text{ tq Card}\{x \in [0; 2\pi] \text{ tq } f(x) = 0\} < +\infty\}$.
Les zéros de f, différents de 0 et de 2π sont isolés :
Si $f(x) = 0$ avec $x \in]0; 2\pi[$ alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout y appartenant à $[x-\delta; x+\delta] \setminus \{x\}$, $f(y) \neq 0$.
Il résulte alors du théorème des valeurs intermédiaires que f est de signe constant sur $[x-\delta; x[$ et sur $]x; x+\delta]$. On dira que f change de signe en x si les signes de f de part et d'autre de x sont différents.
En 0, le signe de f à gauche sera celui de f à gauche en 2π, f pouvant être vue comme la restriction à $[0; 2\pi]$ d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique à cause de l'hypothèse $f(0) = f(2\pi)$.
Finalement l'hypothèse de récurrence sera $\mathcal{P}(n)$: toute fonction $f \in F$ telle que pour tout k compris entre 0 et n, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0$ s'annule en changeant de signe au moins $2n+2$ fois.

On commence par montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $f \in F$ telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
f doit changer de signe au moins une fois sur $]0; 2\pi[$: sinon f est une fonction différente de la fonction nulle (elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois) continue de signe constant et d'intégrale nulle. Notons t_0 un point où f s'annule en changeant de signe et supposons que t_0 est unique sur $]0; 2\pi[$.
0 est à gauche de t_0 et 2π à droite donc $f(0)f(2\pi) \leq 0$.
Mais $f(2\pi) = f(0)$ donc $f(0)^2 \leq 0$.
On en déduit $f(0) = f(2\pi) = 0$.
De plus le signe de f à droite de 0 est celui de f à gauche de t_0 et celui de f à gauche de 0 est celui de f à droite de t_0 : f change de signe en 0.
$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
Remarquons que 2 est non seulement un minorant mais aussi un minimum : la fonction cos appartient à F et son intégrale sur $[0; 2\pi]$ est nulle. cos ne s'annule que deux fois sur $[0; 2\pi]$ en $\dfrac{\pi}{2}$ et en $3\dfrac{\pi}{2}$.

On suppose $\mathcal{P}(n-1)$ vraie ($n \in \mathbb{N}^*$).

Soit $f \in F$ telle que k compris entre 0 et n, $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0$.
D'après l'hypothèse de récurrence, f s'annule en changeant de signe au moins $2n$ fois.
Supposons que f s'annule en changeant de signe exactement $2n$ fois en $t_1, \dots, t_{2n}$ avec $0 \leq t_1 < \dots < t_{2n} \leq 2\pi$.
On cherche trois nombres non tous nuls a, b et c tels que
$a + b\cos(t_1) + c\sin(t_1) = a + b\cos(t_2) + c\sin(t_2) = 0$.
Cela équivaut à $\begin{pmatrix} \cos(t_1) & \sin(t_1) \\ \cos(t_2) & \sin(t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -a \end{pmatrix}$
Le déterminant de la matrice est $\sin(t_2 - t_1)$ qui est non nul sauf si $t_2 - t_1 = \pi$ mais dans ce cas $\sin(t - t_1) = 0 - \sin(t_1)\cos(t) + \cos(t_1)\sin(t)$ s'annule en $t = t_1$ et en $t = t_2$ et $(a, b, c) = (0, -\sin(t_1), \cos(t_1))$ convient.
On pourra remarquer que si $n \geq 2$, alors l'écart minimal entre 2 t_i consécutifs est strictement inférieur à π et on peut prendre ce t_i plutôt que t_1.
En t_1 et en t_2 la fonction $t \mapsto a + b\cos(t) + c\sin(t)$ change de signe : sinon sa dérivée serait nulle et on aurait en t_1 par exemple : $-b\sin(t_1) + c\cos(t_1) = 0$
D'où $\begin{pmatrix} \cos(t_1) & \sin(t_1) \\ -\sin(t_1) & \cos(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t_1) & -\sin(t_1) \\ \sin(t_1) & \cos(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\cos(t_1) \\ -a\sin(t_1) \end{pmatrix}$.
On a alors :
$0 = a + b\cos(t_2) + c\sin(t_2) = a(1 - \cos(t_2 - t_1))$
$0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$ et on ne peut pas avoir $t_1 = 0$ et $t_2 = 2\pi$ sinon f serait de signe constant.
Donc $\cos(t_2 - t_1) \neq 1$ et $a = 0$, puis $b = c = 0$.
La fonction $t \mapsto f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))$ ne change donc pas de signe en t_1 et en t_2.
On a : $\int_0^{2\pi} f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))\,\mathrm{d}t = 0$ par linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1; n-1]\!] \quad \cos(t)\cos(kt) &= \frac{1}{2}(\cos((k-1)t + \cos((k+1)t)) \\ \sin(t)\sin(kt) &= \frac{1}{2}(\cos((k-1)t - \cos((k+1)t)) \\ \sin(t)\cos(kt) &= \frac{1}{2}(\sin((k+1)t - \sin((k-1)t)) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0; n-1]\!] \qquad & \int_0^{2\pi} f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\ = \ & \int_0^{2\pi} f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))\sin(kt)\,\mathrm{d}t \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $t \mapsto f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))$ s'annule en changeant de signe au moins $2n$ fois.
Dans le cas général ie $t_2 - t_1 \neq \pi$, $a \neq 0$ et $a + b\cos(t) + c\sin(t) = a + A\sin(t - t_3)$ ne s'annule qu'en t_1 et t_2 donc les points où $f(t)(a + b\cos(t) + c\sin(t))$ s'annule en changeant de signe sont les points $t_3, \dots, t_{2n}$.
On en déduit $2n - 2 \geq 2n$: c'est absurde.

Reste le cas où $t_2 - t_1 = \pi$.
D'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $t \mapsto f(t)\sin(t-t_1)$ s'annule en changeant de signe au moins $2n$ fois.
Si $t_1 \neq 0$ alors $\sin(t-t_1)$ ne s'annule qu'en t_1 et en $t_1+\pi = t_2$. En ces points $f(t)\sin(t-t_1)$ ne change pas de signe.
Donc les points où $f(t)\sin(t-t_1)$ s'annule en changeant de signe sont les points $t_3, \dots, t_{2n}$.
On en déduit $2n-2 \geq 2n$: c'est absurde.
Reste le cas où $t_1 = 0$ et $t_2 = \pi$.
Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f(t)\sin(t)$ s'annule en changeant de signe au moins $2n$ fois.
$\sin(t)$ s'annule en 0, en π et en 2π. $f(t)\sin(t)$ ne change pas de signe en 0 et en π. Elle ne change pas non plus de signe en 2π par périodicité, ce qui permet de conclure comme dans les cas précédents.

Reste à exhiber une fonction qui vérifie ces hypothèses et qui s'annule $2n+2$ fois.
La fonction $t \mapsto \cos((n+1)x)$ convient.
En effet les points où elle s'annule sont les nombres $\dfrac{1}{(n+1)}\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ avec $0 \leq k \leq 2n+1$.

Exercice 6 *(X 2024)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
On pose $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Correction
f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{g^2(x)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} g'(0) = f(0)$ donc h est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par Cauchy-Schwarz :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; g(x)^2 \leq \displaystyle\int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t \times \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$
On en déduit :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; 0 \leq h(x) \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$
mais cela ne permet pas de conclure.

Au moyen d'une intégration par parties facile à justifier :

$$\begin{aligned}
\forall x>0\ \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{t}g^2(t)\right]_0^x+\int_0^x \frac{2}{t}g(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{g^2(x)}{x}+2\int_0^x \frac{f(t)}{t}g(t)\,\mathrm{d}t\\
&\leq 2\int_1^x \frac{f(t)}{t}g(t)\,\mathrm{d}t \text{ car } -\frac{g^2(x)}{x}\leq 0\\
&\leq 2\left(\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\times\left(\int_0^x \frac{g^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \text{ par Cauchy-Schwarz}\\
&\leq 2\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\times\left(\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

En distinguant, le cas où h est nulle sur $[0;x]$, on montre :
$\forall x>0\ \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t\leq 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$
La fonction h étant positive, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 7 *(X 2024)*

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy''+y'-4xy=0$.
Indication : chercher les solutions développables en série entière

Correction
On cherche des solutions sous forme de série entière au voisinage de $x=0$:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Calcul des dérivées

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Substitution dans l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
xy''+y'-4xy &= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}-4x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}-4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}=0
\end{aligned}$$

Changement d'indices
On effectue les changements d'indices suivants :
- Pour les deux premières sommes, posons $k=n-1$
- Pour la troisième somme, posons $k=n+1$

Ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)ka_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k - 4\sum_{k=1}^{+\infty}a_{k-1}x^k = 0$$

Relation de récurrence
En séparant le terme $k=0$ et en regroupant les autres termes :

$$a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[(k+1)^2 a_{k+1} - 4a_{k-1}\right]x^k = 0$$

On obtient donc :
- Pour $k=0$: $a_1 = 0$
- Pour $k \geq 1$: $(k+1)^2 a_{k+1} = 4a_{k-1}$

Résolution de la récurrence
On constate que tous les coefficients impairs sont nuls ($a_1 = a_3 = \cdots = 0$). Pour les coefficients pairs, en posant $k = 2n-1$:

$$a_{2n} = \frac{4}{(2n)^2}a_{2n-2} = \frac{1}{n^2}a_{2n-2}$$

Par itération, on trouve :

$$a_{2n} = \frac{a_0}{(n!)^2}$$

Solution générale
La solution s'écrit donc :

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(n!)^2}$$

Réciproquement, on vérifie que le rayon de convergence est strictement positif.
Soit $r > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \dfrac{r^{2n}}{(n!)^2} > 0$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{r^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$
Donc par la règle de d'Alembert, la série de terme général $\dfrac{r^{2n}}{(n!)^2}$ converge.
Le rayon de convergence de la série entière est donc infini.
La fonction est bien solution de l'équation différentielle en reprenant les calculs à l'envers, ou en reprenant ce qui précède avec des équivalences.
Conclusion
Les solutions développables en série entière de l'équation différentielle sont les fonctions :

$$\boxed{y(x) = C\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(n!)^2}} = Cy_0(x)$$

où C est une constante arbitraire.

Soit y une solution définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction y_0 étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on peut poser $C = \dfrac{y}{y_0}$. C est, comme y, une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R}\ y(x) & = & C(x)y_0(x) \\ y'(x) & = & C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x) \\ y''(x) & = & C''(x)y_0(x) + 2C'(x)y_0'(x) + C(x)y_0''(x) \\ xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) & = & xC''(x)y_0(x) + (2xy_0'(x) + y_0(x))C'(x) + C(x)(xy_0''(x) + y_0'(x) - 4xy_0(x)) \\ & = & xC''(x)y_0(x) + (2xy_0'(x) + y_0(x))C'(x) \end{array}$$

Donc C' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy_0(x)z' + (2xy_0'(x) + y_0(x))z = 0$

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \frac{2xy_0'(x) + y_0(x)}{xy_0(x)}\,\mathrm{d}x & = & \displaystyle\int \left(2\frac{y_0'(x)}{y_0(x)} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ & = & 2\ln(y_0(x)) + \ln(|x|) \end{array}$$

Donc il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que :
$\forall x > 0\ C'(x) = \dfrac{C_1}{xy_0(x)^2}$
$\forall x < 0\ C'(x) = \dfrac{C_2}{xy_0(x)^2}$
Si C_1 est non nulle alors $C'(x) \sim_{0^+} \dfrac{C_1}{x}$
Donc C' n'est pas intégrable en 0.
$\displaystyle\int_0^1 C'(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas absolument. Comme C' est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^1 C'(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas et $C(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$
On en déduit que $y(x) = C(x)y_0(x)$ tend vers $\pm\infty$ en 0.
C'est absurde donc $C_1 = 0$.
De même $C_2 = 0$
Donc C' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Donc $\dfrac{y}{y_0}$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
Par continuité, $\dfrac{y}{y_0}$ est constante sur $\mathbb{R}$ ie y est de la forme Cy_0 avec C une constante.
La réciproque est vraie car Cy_0 est une solution de (E) développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 *(X 2024)*

Soient $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E) : y'' - py = 0$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.
2. On admet que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe y vérifiant (E) et $(y(0), y'(0)) = (a, b)$.
   Montrer que (E) admet une solution non bornée.

Correction

1. Je pense qu'il y a une erreur dans l'énoncé.
   On prend p positive et y la solution de (E) vérifiant $(y(0), y'(0)) = (1, 1)$.
   Supposons que y s'annule sur $\mathbb{R}_+$.
   On considère $Z = \{x \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } y(x) = 0\}$.
   Z est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ donc Z possède une borne inférieure r.

Z étant fermé, r appartient à Z.
$y(0) > 0$ donc $0 \notin Z$ et $r > 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires :
$\forall x \in [0; r[\ y(x) > 0$
Donc :
$\forall x \in [0; r]\ y''(x) = p(x)y(x) \geq 0$
Donc y est convexe sur $[0; r]$ et :
$\forall x \in [0; r]\ y(x) \geq y(0) + xy'(0) = x$
En particulier $y(r) \geq r > 0$
On aboutit à une contradiction doc y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires :
$\forall x \in \mathbb{R}\ y(x) > 0$
Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}\ y''(x) = p(x)y(x) \geq 0$
Donc y est convexe sur $[0; r]$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}\ y(x) \geq y(0) + xy'(0) = x$
Mais si $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0$ ie $y'(x) = o(1)$ alors :
$y(x) - 1 = y(x) - y(0) = \displaystyle\int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_0^x \mathrm{d}t\right) = o(x)$
On aboutit à une contradiction.
Je pense donc qu'il faut ajouter l'hypothèse y bornée :
$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in \mathbb{R}\ |y(x)| \leq M$
$\forall x \in \mathbb{R}_+\ |y(x)p(x)| = |y(x)|\ |p(x)| \leq M\,|p(x)|$
On en déduit que yp est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Donc $y'' = yp$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Donc $y'(x) = y'(0) + \displaystyle\int_0^x y''(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$
y étant bornée, l ne peut être que 0.
En effet, supposons $l > 0$.
$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \geq x_0\ y'(x) \geq \dfrac{l}{2}$
$\forall x \geq x_0\ y(x) = y(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^x y'(t)\,\mathrm{d}t \geq y(x_0) + \frac{l}{2}(x - x_0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
Donc $y(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$: c'est absurde.
Supposons $l < 0$.
$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \geq x_0\ y'(x) \leq \dfrac{l}{2}$
$\forall x \geq x_0\ y(x) = y(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^x y'(t)\,\mathrm{d}t \leq y(x_0) + \frac{l}{2}(x - x_0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$
Donc $y(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$: c'est absurde.

2. Supposons que toutes les solutions de E sont bornées.
Soit y_1 la solution de (E) vérifiant $(y_1(0), y_1'(0)) = (1, 0)$.
Soit y_2 la solution de (E) vérifiant $(y(0), y'(0)) = (0, 1)$.

Soit W la fonction $x \mapsto \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} W & = & y_1y_2' - y_1'y_2 \\ W' & = & y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' \\ & = & y_1y_2'' - y_1''y_2 = py_1y_2 - py_1y_2 \text{ car } y_1 \text{ et } y_2 \text{ sont solutions de } (E) \\ & = & 0 \end{array}$$

On en déduit :
$\forall x \in \mathbb{R}\ W(x) = W(0) = 1$
Mais les solutions de (E) sont toutes bornées, en particulier y_1 et y_2 et d'après la première question, $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
C'est absurde donc (E) possède au moins une solution bornée.

Exercice 9 *(X 2024)*

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :
$\forall t \in \mathbb{R}\ X'(t) = JSX(t)$ où $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

Correction
Soit $q : t \mapsto X(t)^T SX(t)$.
q est $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in \mathbb{R}\ q'(t) & = & X'(t)^T SX(t) + X(t)^T SX'(t) = (JSX(t))^T SX(t) + X(t)^T S(JSX(t)) \\ & = & X(t)^T S(-J)SX(t) + X(t)SJSX(t) \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc :
$\forall t \in \mathbb{R}\ X(t)^T SX(t) = X(0)^T SX(0)$
Mais on a classiquement pour une matrice symétrique réelle :
$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ Y^T SY \geq \lambda_1 \|Y\|^2$
où λ_1 est la plus petite valeur propre de S.
Ici S est symétrique définie positive donc $\lambda_1 > 0$ et :
$\forall t \in \mathbb{R}\ \|X(t)\|^2 \leq \dfrac{X(0)^T SX(0)}{\lambda_1}$
Donc X est bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 *(X 2024)*

On étudie un groupe de cellules. A l'instant initial $n = 0$, il y en a une. A chaque instant, chaque cellule peut de façon équiprobable : mourir, rester telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3.
Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.

Correction
Si on note p_n la probabilité qu'un groupe de n cellules disparaisse, on a :
$p_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}p_1 + \dfrac{1}{4}p_2 + \dfrac{1}{4}p_3$ (sans s'embarrasser de justification pour l'instant).

$p_n = p_1^n$ (en supposant l'indépendance des lignées)
Donc $p_1 = \frac{1}{4}(1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3)$.
Donc $p_1^3 + p_1^2 - 3p_1 + 1 = 0$
$p_1 = 1$ est racine évidente et $p_1^3 + p_1^2 - 3p_1 + 1 = (p_1 - 1)(p_1^2 + 2p_1 - 1)$
$\Delta = 4 + 4 = (2\sqrt{2})^2$ donc on a deux autres racines $-1 - \sqrt{2}$ à écarter car strictement négative et $-1 + \sqrt{2} \in]0; 1[$.
Il y a donc deux possibilités : laquelle est la bonne ?
Notons X_n la population à l'instant n.
On cherche $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n = 0)\right)$
$X_0 = 1$ et $(X_n = 0) \subset (X_{n+1} = 0)$
Donc par continuité croissante, la probabilité cherchée est $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = k)P(X_n = k) \text{ en fait la somme est finie avec au plus } 3^n \text{ termes}\\
&= P(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} P(X_n = k)\\
&= G_{X_n}\left(\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{X_n}(t) &= \sum_{k=0}^{3^n} P(X_n = k)t^k\\
&= \sum_{k=0}^{3^n} \left(\sum_{l=0}^{3^{l-1}} t^k P(X_n = k \mid X_{n-1} = l)P(X_{n-1} = l)\right)\\
&= \sum_{l=0}^{3^{l-1}} \left(P(X_{n-1} = l) \sum_{k=0}^{3^n} t^k P(X_n = k \mid X_{n-1} = l)\right)
\end{aligned}$$

La somme interne est la fonction génératrice de la loi de X_n conditionnellement à $(X_{n-1} = l)$.
C'est donc la série génératrice d'une somme de l variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1; 4]\!]$ qui est d'ailleurs la loi de X_1.
Donc :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}\ G_{X_n}(t) &= \sum_{l=0}^{3^{l-1}} P(X_{n-1} = l)\left(G_{X_1}(t)\right)^l\\
&= G_{X_{n-1}}(G_{X_1}(t))
\end{aligned}$$

Donc $G_{X_n} = G_{X_1} \circ \cdots \circ G_{X_1}$ et on a aussi $G_{X_n} = G_{X_1} \circ G_{X_{n-1}}$
Donc $P(X_{n+1} = 0) = G_{X_1}\left(G_{X_{n-1}}\left(\frac{1}{4}\right)\right) = G_{X_1}(P(X_n = 0)$
Sur $[0; 1]$, G_{X_1} a deux points fixes $\sqrt{2} - 1$ et 1.
G_{X_1} étant croissante, les intervalles $[0; \sqrt{2} - 1]$ et $]\sqrt{2} - 1; 1]$ sont stables.
$P(X_0 = 0) = 0$ donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ P(X_n = 0) \in [0; \sqrt{2} - 1]$.

$P(X_1 = 0) > P(X_0 = 0)$ donc, G_{X_1} étant croissante, on montre par récurrence que $P(X_{n+1} = 0) > P(X_n = 0)$.
La suite $(P(X_n = 0))$ est croissante et majorée par $\sqrt{2} - 1$ donc elle converge vers un point fixe de G_{X_1} inférieur ou égal à $\sqrt{2} - 1$.
La réponse est donc $\sqrt{2} - 1$.