Révisions 2025
Espaces vectoriels normés
5 juin 2025

941

Exercice 1

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Soit $N_u \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_+ \\ P = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k a_k| \end{cases}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite u pour que N_u soit une norme.
2. Soit u et v deux suites réelles satisfaisant la condition de la question précédente.
   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les normes N_u et N_v soient équivalentes.

Exercice 2 *(Mines 2023)*

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & a \\ c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$.

1. Trouver un nombre réel θ tel que $M^3 = -\theta M$.
2. Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ M^{2n} = (-\theta)^{n-1} M^2$
3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sa limite est notée S_∞.
4. Trouver deux nombre réels α et β tels que $S_\infty = I_3 + \alpha M + \beta M^2$.

Exercice 3 *(Mines MP 2022 extrait)*

On note $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ et on rappelle que N_1 définie par :
$\forall f \in E\ N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$
est une norme.

1. Montrer que N définie par :
   $\forall f \in E\ N(f) = \displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
   est une norme.

2. N et N_1 sont-elles équivalentes ?

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur I.
Soit $E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } f(x) < y\}$.

1. Montrer que $E(f)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer :
   f convexe sur $I \iff E(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
3. ?
4. ?

Exercice 5 *(Ens 2023)*

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$.
   Montrer que f est un automorphisme orthogonal.
2. On pose $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
   Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :
   $\|x + y\|_1 + \|x - y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1) \iff \forall i \in [\![1; n]\!] \ x_i y_i = 0$
3. Déterminer les applications linéaires f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telles que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \ \|f(x)\|_1 = \|x\|_1$

Exercice 6

Soit $A = \left\{ \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \right)^{n+p}, \ (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$.
Déterminer l'adhérence de A.

Exercice 7 *(X 2024)*

Soit I un segment de R. On munit $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :
$\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \ \ \|f\|_\infty = \max\limits_{x \in I} (|f(x)|)$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, \ldots, x_n)$ des points deux à deux distincts de I.
On note $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ la base des polynômes de Lagrange associée à $(x_0, \ldots, x_n)$.

Soit $\varphi \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |P_i(x)| \end{cases}$

Soit L l'application de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ qui à f associe la fonction $L(f) \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i) P_i(x) \end{cases}$

1. Montrer :
   $\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \ \|L(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty$
2. Peut-il y avoir égalité dans l'inégalité précédente ?

Exercice 8 *(X 2022)*

On note $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$ et $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|x\| \leq 1\}$.
Existe-t-il une partition de D en deux parties isométriques ?
Reformulation
Existe-t-il deux parties A et B de D disjointes, de réunion égale à D et une fonction $f : A \to B$ bijective telle que :
$\forall (x, y) \in A^2 \ \ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

Exercice 9 *(ENS 2023)*

Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on note $g_\beta \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \max(x - \beta, 0) \end{cases}$.
On note E l'espace vectoriel engendré par la famille $(g_\beta)_{\beta \in \mathbb{R}}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.
Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in E$ telle que $\sup\limits_{x \in [-1;1]} |f(x) - g(x)| \leq \epsilon$.