Révisions 2025
Matrices diagonalisables
5 juin 2025

941

Exercice 1 *(CCP 2023)*

Soit $n \geq 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Quel est le rang de A ?
2. Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$ alors X appartient à l'image de A.
   Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 2 *(CCP 2023)*

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Quel est le rang de A ?
   Que peut-on en déduire sur les éléments propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A.

Exercice 3 *(Mines 2023, 2024)*

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ a_{i,j} = j + n(i-1)$

1. Trouver le rang de A
2. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 4 *(Mines 2023)*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ j \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $(\lambda+1)x_1 = (\lambda+2)x_2 = \cdots = (\lambda+n)x_n$.
2. En déduire que $-1, -2, \dots, -n$ ne sont pas valeurs propres de A.
3. Montrer que λ est valeur propre de A si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda+k} = 1$.
4. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 5 *(Centrale 2023)*

1. Soient A et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2 = I_{2n}$ et $AB + BA = 0$.
   (a) Montrer que A et B sont diagonalisables.
   Trouver leurs valeurs propres et leurs multiplicités.
   (b) Soit $C = iAB$.
   Montrer que C est diagonalisable.
   Trouver ses valeurs propres et leurs multiplicités.
2. Soient A et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB + BA = 0$.
   (a) Montrer que A et B sont diagonalisables.
   Trouver leurs valeurs propres et leurs multiplicités.
   (b) A et B ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

Exercice 6 *(Mines 2023)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et qu'elle n'admet qu'une seule valeur propre réelle $a > 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Donner la nature de la série de terme général $\sin(\pi a^n)$.

Exercice 7 *(X 2011, Mines 2023)*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Exercice 8 *(Mines 2015, Centrale 2018)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que si A est diagonalisable et inversible alors M l'est aussi.

Exercice 9 *(Ens 2023)*

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^n = I_2$.
Montrer que $M^{12} = I_2$.

Exercice 10 *(Centrale 2023)*

Soit $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et telles qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.

1. Que dire de la diagonalisabilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$?
2. Soit $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.
   Justifier l'existence de p_0 le plus petit entier naturel non nul tel que $A^p = I_2$.
   p_0 est appelé l'ordre de A.
   Quelles sont les valeurs possibles de p_0 ?